数学Ⅱ・数学B

〔2〕 $S(x)$をxの2次式とする。xの整式$P(x)$を$S(x)$で割ったときの商を$T(x)$，余りを$U(x)$とする。ただし，$S(x)$と$P(x)$の係数は実数であるとする。

(15点)

$$P(x) = S(x)T(x) + U(x)$$

$$\begin{array}{r} T(x) \\ S(x)\overline{)\,P(x)} \\ \vdots \\ \hline U(x) \end{array}$$

(1) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 5$，$S(x) = x^2 + 4x + 7$の場合を考える。

方程式$S(x) = 0$の解は$x = \boxed{-2}_{\text{コサ}} \pm \sqrt{\boxed{3}_{\text{シ}}}\,i$である。(2点)

また，$T(x) = \boxed{2}_{\text{ス}}x - \boxed{1}_{\text{セ}}$ (2点)，$U(x) = \boxed{12}_{\text{ソタ}}$である。(1点)

$S(x) = 0$ とすると $x^2 + 4x + 7 = 0$

$\therefore\ x = \boxed{-2 \pm \sqrt{3}\,i}$ コサ，シ

$$\begin{array}{r} 2x \phantom{{}+7x^2} - 1 \phantom{{}+10x+5} \\ x^2+4x+7\,\overline{)\,2x^3 + 7x^2 + 10x + 5} \\ 2x^3 + 8x^2 + 14x \phantom{{}+5} \\ \hline -x^2 - 4x + 5 \\ -x^2 - 4x - 7 \\ \hline 12 \end{array}$$

よって $T(x) = \boxed{2x - 1}$ ス，セ

$U(x) = \boxed{12}$ ソタ

$S(\alpha)=S(\beta)=0$

(2) 方程式 $S(x)=0$ は異なる二つの解 α，β をもつとする。このとき

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になる

ことと同値な条件を考える。

$P(x)=S(x)T(x)+k$ が x の恒等式で $x=\alpha,\beta$ として

$P(\alpha)=\underset{0}{S(\alpha)}T(\alpha)+k=k$

$P(\beta)=\underset{0}{S(\beta)}T(\beta)+k=k$

すなわち $P(\alpha)=P(\beta)=k$

(i) 余りが定数になるときを考えてみよう。

仮定から，定数 k を用いて $U(x)=k$ とおける。このとき，$\boxed{3}$。

チ (3点)

したがって，余りが定数になるとき，$\boxed{1}$ が成り立つ。

ツ (1点)

$\boxed{3}$ $\boxed{1}$

チ ツ

$\boxed{\text{チ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる。また，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

① $P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

② $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる。また，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

③ $P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ $T(\alpha)=T(\beta)$	① $P(\alpha)=P(\beta)$
② $T(\alpha)\neq T(\beta)$	③ $P(\alpha)\neq P(\beta)$

P(α)＝P(β)

(ii)　逆に $\boxed{\quad\text{ツ}\quad}$ が成り立つとき，余りが定数になるかを調べよう。

$S(x)$が 2 次式であるから，m，n を定数として $U(x) = mx + n$ とおける。$P(x)$を $S(x)$，$T(x)$，m，n を用いて表すと，$P(x) = \boxed{\text{①}}$ テ となる。この等式の x に α，β をそれぞれ代入すると $\boxed{\text{①}}$ ト となるので，

（テ,ト両方正解で2点）

P(α)＝P(β) $\boxed{\quad\text{ツ}\quad}$ と $\alpha \neq \beta$ より $\boxed{\text{③}}$ ナ となる。以上から余りが定数になることがわかる。

ナ（テ,トが両方正解かつナが正解で1点）

U(x)=mx+n
とおくと
P(x)=S(x)T(x)+mx+n
$\boxed{\text{①}}$ テ
となる.

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪　$(mx + n)S(x)T(x)$	①　$S(x)T(x) + mx + n$
②　$(mx + n)S(x) + T(x)$	③　$(mx + n)T(x) + S(x)$

x=α, x=β
を代入すると

$P(\alpha)=\underbrace{S(\alpha)}_{0}T(\alpha)+m\alpha+n = m\alpha+n$

$P(\beta)=\underbrace{S(\beta)}_{0}T(\beta)+m\beta+n = m\beta+n$　$\boxed{\text{①}}$ ト

(∵ S(α)=S(β)=0)

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪　$P(\alpha) = T(\alpha)$　かつ　$P(\beta) = T(\beta)$

①　$P(\alpha) = m\alpha + n$　かつ　$P(\beta) = m\beta + n$

②　$P(\alpha) = (m\alpha + n)T(\alpha)$　かつ　$P(\beta) = (m\beta + n)T(\beta)$

③　$P(\alpha) = P(\beta) = 0$

④　$P(\alpha) \neq 0$　かつ　$P(\beta) \neq 0$

P(α)＝P(β)
が成り立つので
mα+n=mβ+n
すなわち
m(α−β)=0
α≠β より α−β≠0
であるから
m＝0
$\boxed{\text{③}}$ ナ

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪　$m \neq 0$	①　$m \neq 0$　かつ　$n = 0$
②　$m \neq 0$　かつ　$n \neq 0$	③　$m = 0$
④　$m = n = 0$	⑤　$m = 0$　かつ　$n \neq 0$
⑥　$n = 0$	⑦　$n \neq 0$

(補) n は任意の定数

(i), (ii)の考察から，方程式 $S(x)=0$ が異なる二つの解 α，β をもつとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $\boxed{}$ であることは同値である。

ツ

$P(\alpha)=P(\beta)$

$\alpha=-1,\ \beta=2$ としているだけ

(3) p を定数とし，$P(x)=x^{10}-2x^9-px^2-5x$，$S(x)=x^2-x-2$ の場合を考える。$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき，$p=\boxed{-6}$ となり，その余りは $\boxed{14}$ となる。

テト (2点)

ネノ (1点)

$S(x)=0$ とすると $x^2-x-2=0$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-1,2$$

$$P(-1)=1+2-p+5=-p+8$$

$$P(2)=2^{10}-2^{10}-4p-10=-4p-10$$

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になる条件は(2)より

$$P(-1)=P(2)$$

であるから $-p+8=-4p-10$

よって $p=\boxed{-6}$ //　=テト

その余りは

$$P(-1)=-(-6)+8=\boxed{14}$$ // ネノ

$\alpha=-1,\ \beta=2$ として

$P(\alpha)=P(\beta)$

この値が余り

補 $P(2)=-4(-6)-10=14$