数学Ⅰ・数学A　第3問～第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第5問 （選択問題）（配点　20）

図1のように，平面上に5点A，B，C，D，Eがあり，線分AC，CE，EB，BD，DAによって，星形の図形ができるときを考える。線分ACとBEの交点をP，ACとBDの交点をQ，BDとCEの交点をR，ADとCEの交点をS，ADとBEの交点をTとする。

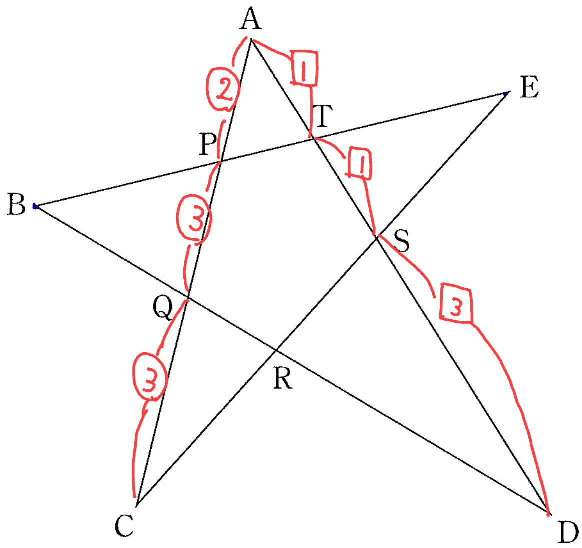


図　1

ここでは

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PQ} : \mathrm{QC} = 2 : 3 : 3, \quad \mathrm{AT} : \mathrm{TS} : \mathrm{SD} = 1 : 1 : 3$$

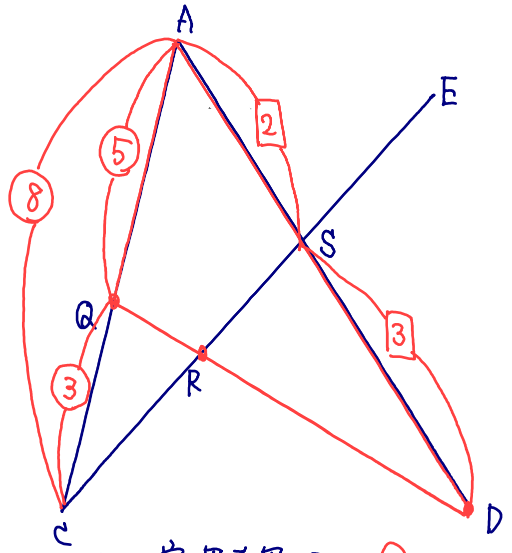
を満たす星形の図形を考える。

以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ。

(1)　△AQD と直線 CE に着目すると

$$\frac{QR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{\boxed{\text{ア}}}{CQ}=1$$

AC　⓪ ア　(2点)



メネラウスの定理を用いて　⓪ア

$$\frac{QR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{\boxed{AC}}{CQ}=1$$

が成り立つので

が成り立つので　$\frac{QR}{RD}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3}=1$

∴ $\frac{QR}{RD}=\frac{1}{4}$ であるから　QR : RD = $\boxed{1:4}$　イウ

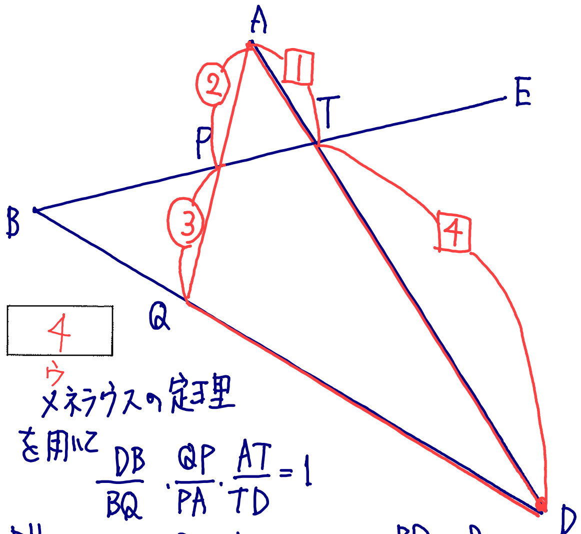
QR : RD = $\boxed{1}$: $\boxed{4}$

イ　ウ (3点)

となる。また，△AQD と直線 BE に着目すると

QB : BD = $\boxed{3}$: $\boxed{8}$

エ　オ (2点)



となる。したがって

BQ : QR : RD = $\boxed{3}$: $\boxed{1}$: $\boxed{4}$

エ　イ　ウ

メネラウスの定理を用いて　$\frac{DB}{BQ}\cdot\frac{QP}{PA}\cdot\frac{AT}{TD}=1$

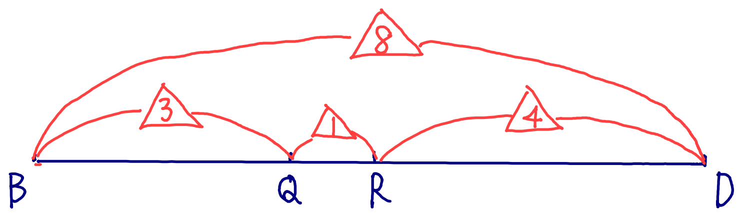
より　$\frac{BD}{QB}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=1$　∴ $\frac{BD}{QB}=\frac{8}{3}$

であるから　QB : BD = $\boxed{3:8}$　エオ

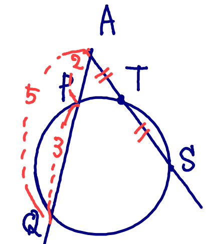
となることがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ AC	① AP	② AQ	③ CP	④ PQ



BQ : QR : RD = 3 : 1 : 4

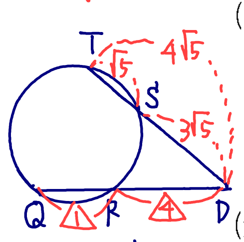


やらなくてよいけど…

(2)　5点P，Q，R，S，Tが同一円周上にあるとし，AC = 8 であるとする。

AC = 8 より AP = 2, PQ = 3, QC = 3

方べきの定理を用いて
AP・AQ = AT・AS
2・5 = AT・2AT
$AT^2 = 5$
よって $AT = \boxed{\sqrt{5}}$ カ
TS = √5
DS = 3√5



方べきの定理を用いて
DR・DQ = DS・DT
DR・$\frac{5}{4}$DR = 3√5・4√5
$DR^2 = 48$
∴ DR = 4√3

(i)　5点A，P，Q，S，Tに着目すると，AT：AS = 1：2 より

$AT = \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ 　5　カ (3点)　となる。さらに，5点D，Q，R，S，Tに着目すると

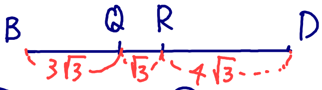
$DR = 4\sqrt{3}$ となることがわかる。

(1) より　BQ = 3√3，QR = √3 もわかる

(ii)　3点A，B，Cを通る円と点Dとの位置関係を，次の**構想**に基づいて調べよう。

> **構想**
>
> 線分ACとBDの交点Qに着目し，AQ・CQとBQ・DQの大小を比べる。

BQ・DQ = 3√3・5√3 = $\boxed{45}$ キク



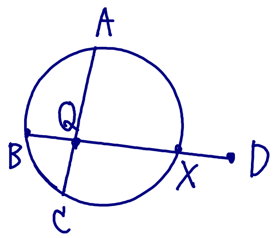
まず，AQ・CQ = 5・3 = 15 かつ BQ・DQ = $\boxed{\text{キク}}$ 45 であるから

15 < 45 なので　AQ・CQ $\boxed{<}$ BQ・DQ …①　⓪ケ

$$AQ \cdot CQ \ \boxed{\text{ケ}}\ BQ \cdot DQ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

< ⓪ ケ　(キク，ケ両方正解で3点)

が成り立つ。また，3点A，B，Cを通る円と直線BDとの交点のうち，Bと異なる点をXとすると



方べきの定理を用いて
AQ・CQ = BQ・XQ …②

$$AQ \cdot CQ \ \boxed{\text{コ}}\ BQ \cdot XQ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

= ① コ

①，② より　BQ・XQ < BQ・DQ
∴ XQ < DQ
よって 点Dは 3点A，B，Cを通る 円の $\boxed{外部}$ にある
②シ

が成り立つ。①と②の左辺は同じなので，①と②の右辺を比べることにより，XQ $\boxed{\text{サ}}$ DQが得られる。したがって，点Dは3点A，B，Cを通る円の $\boxed{\text{シ}}$ にある。

⓪ サ <　② シ 外部　(コ，サ，シすべて正解で4点)

$\boxed{\text{ケ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

ケ ⓪　<	コ ①　=	②　>

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪　内　部	①　周　上	②　外　部

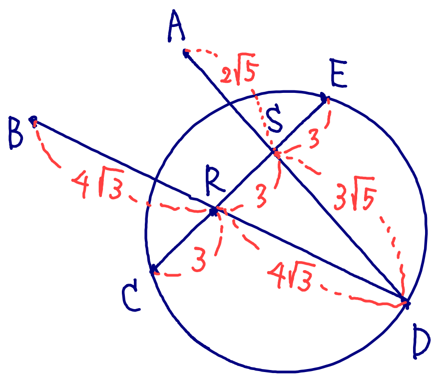
(iii)　3点C，D，Eを通る円と2点A，Bとの位置関係について調べよう。

この星形の図形において，さらにCR = RS = SE = 3となることがわかる。したがって，点Aは3点C，D，Eを通る円の $\boxed{\text{ス}}$ 2 にあり，点Bは3点C，D，Eを通る円の $\boxed{\text{セ}}$ 2 にある。

(ス，セ両方正解で3点)

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 内　部	① 周　上	ス，セ ② 外　部



$SC \cdot SE = 6 \cdot 3 = 18$

$SD \cdot SA = 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 30$

$\therefore\ SC \cdot SE < SD \cdot SA$

点Aは3点C，D，Eを通る円の $\boxed{\text{外部}}$ // ② ス

$RC \cdot RE = 3 \cdot 6 = 18$

$RD \cdot RB = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 48$

$\therefore\ RC \cdot RE < RD \cdot RB$

点Bは3点C，D，Eを通る円の $\boxed{\text{外部}}$ // ② セ