数学Ⅰ・数学A　第3問～第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第4問 （選択問題）（配点　20）

T3，T4，T6を次のようなタイマーとする。

T3 ： 3進数を3桁表示するタイマー

T4 ： 4進数を3桁表示するタイマー

T6 ： 6進数を3桁表示するタイマー

なお，n 進数とは n 進法で表された数のことである。

a	b	c

$T3 = abc_{(3)} = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c$

$T4 = abc_{(4)} = a4^2 + b\cdot 4 + c$

$T6 = abc_{(6)} = a\cdot 6^2 + b\cdot 6 + c$

これらのタイマーは，すべて次の**表示方法**に従うものとする。

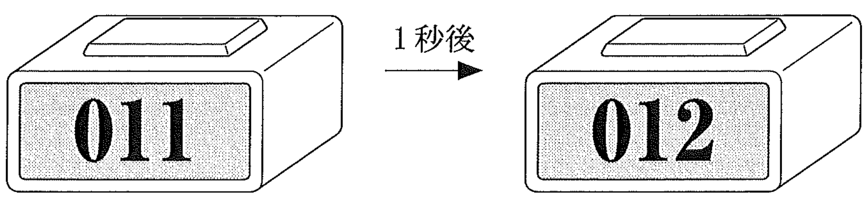
表示方法

(a)　スタートした時点でタイマーは000と表示されている。

(b)　タイマーは，スタートした後，表示される数が1秒ごとに1ずつ増えていき，3桁で表示できる最大の数が表示された1秒後に，表示が000に戻る。

(c)　タイマーは表示が000に戻った後も，(b)と同様に，表示される数が1秒ごとに1ずつ増えていき，3桁で表示できる最大の数が表示された1秒後に，表示が000に戻るという動作を繰り返す。

T3



参考図

例えば，T3はスタートしてから3進数で$12_{(3)}$秒後に012と表示される。その後，222と表示された1秒後に表示が000に戻り，その$12_{(3)}$秒後に再び012と表示される。

(1)　T 6 は，スタートしてから 10 進数で 40 秒後に $\boxed{104}$ と表示される。
アイウ（2点）

T 4 は，スタートしてから 2 進数で $10011_{(2)}$ 秒後に $\boxed{103}$ と表示される。
エオカ（3点）

(2)　T 4 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは，スタートしてから 10 進数で $\boxed{64}$ 秒後であり，その後も $\boxed{64}$ 秒ごとに表示が 000 に戻る。
キク（2点）　キク

同様の考察を T 6 に対しても行うことにより，T 4 と T 6 を同時にスタートさせた後，初めて両方の表示が同時に 000 に戻るのは，スタートしてから 10 進数で $\boxed{1728}$ 秒後であることがわかる。
ケコサシ（3点）

（数学Ⅰ・数学A第 4 問は次ページに続く。）

(1)　40 秒後に T6 は　$40 = 6^2 + 4$
$= 1 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6 + 4$
$= \boxed{104}_{(6)}$
アイウ

$10011_{(2)}$ 秒後に T4 は　$10011_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$
$= 2^4 + 2 + 1$
$= 4^2 + 3$
$= 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 3$
$= \boxed{103}_{(4)}$
エオカ

(2)　T4 は

000
001
002
⋮
333

$1000_{(4)} = 4^3 = 64$

$\boxed{64}$ 秒後に同じ表示になる
キク

同様にして
T6 は $1000_{(6)} = 6^3 = 216$ 秒後に
同じ表示になる

T4 と T6 を同時にスタートして
初めて表示が同時に 000 となるのは
64 と 216 の最小公倍数　　$64 = 2^6$　$216 = 2^3 \cdot 3^3$
より　$2^6 \cdot 3^3 = 64 \times 27$
$= \boxed{1728}$ 秒後
ケコサシ

補　$1728 = 12^3$

(3)　0 以上の整数 ℓ に対して，T４をスタートさせた ℓ 秒後にT４が 012 と表示されることと

ℓ を $\boxed{64}$ で割った余りが $\boxed{6}$ であること

スセ　ソ（3点）

は同値である。ただし，$\boxed{\text{スセ}}$ と $\boxed{\text{ソ}}$ は 10 進法で表されているものとする。

T３についても同様の考察を行うことにより，次のことがわかる。

T３とT４を同時にスタートさせてから，初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を m 秒とするとき，m は 10 進法で $\boxed{518}$ と表される。

タチツ（4点）

$012_{(4)} = 4+2 = 6$

T4 は $4^3 = 64$ 秒ごとに同じ表示になるので

T4 をスタートさせて ℓ 秒後に 012 が表示されるのは

ℓ を $\boxed{64}$ で割った余りが $\boxed{6}$ である

スセ　ソ

$012_{(3)} = 3+2 = 5$

T3 は $3^3 = 27$ 秒ごとに同じ表示になるので

T3 をスタートさせて ℓ 秒後に 012 が表示されるのは

ℓ を 27 で割った余りが 5 である

T3 と T4 を同時にスタートさせて，初めて両方が同時に 012と表示されるまでの時間を m 秒とするとき，x, y を正の整数として

$$m = 27x + 5 = 64y + 6$$

と表せて

$$27x - 64y = 1 \quad \cdots ①$$

$$27x - (2\cdot 27 + 10)y = 1$$

$$27(x - 2y) - 10y = 1$$

$$\underset{3}{(x-2y)}, \quad \underset{8}{y}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ y = 8 \end{cases} \quad \therefore x = 19,\ y = 8$$

$$27\cdot 19 - 64\cdot 8 = 1 \quad \cdots ②$$

①－②として

$$27(x-19) - 64(y-8) = 0$$

$$27(x-19) = 64(y-8)$$

27, 64 は互いに素より k を整数として

$$\begin{cases} x - 19 = 64k \\ y - 8 = 27k \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x = 64k + 19 \\ y = 27k + 8 \end{cases}$$

よって m は $x = 19,\ y = 8$ のときで

$$m = 27\cdot 19 + 5 = 64\cdot 8 + 6$$

$$= \boxed{518}$$

タチツ

また，T4とT6の表示に関する記述として，次の⓪～③のうち，正しいものは $\boxed{③}$ である。

テ（3点）

$\boxed{テ}$ の解答群

T4とT6についてみる

⓪ T4とT6を同時にスタートさせてから，m 秒後より前に初めて両方が同時に012と表示される。
① T4とT6を同時にスタートさせてから，ちょうど m 秒後に初めて両方が同時に012と表示される。
② T4とT6を同時にスタートさせてから，m 秒後より後に初めて両方が同時に012と表示される。
③ T4とT6を同時にスタートさせてから，両方が同時に012と表示されることはない。

$012_{(6)}=6+2=8$

T6は $6^3=216$ 秒ごとに同じ表示になるので

T6をスタートさせて l 秒後に012が表示されるのは

l を216で割った余りが8である

T4とT6を同時にスタートさせて，初めて両方が同時に012と表示されるまでの時間を n 秒とするとき，x, y を正の整数として

$$n=64x+6=216y+8$$

$$64x-216y=2$$

両辺を2でわって

$$32x-108y=1$$

$$2(16x-54y)=1$$

$16x-54y$ は整数であるから（偶数）$=1$ となりこれをみたす整数 x, y はない

よって $\boxed{③}$ テ