数学Ⅰ・数学A　第3問～第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第3問　(選択問題)(配点　20)

箱の中にカードが2枚以上入っており，それぞれのカードにはアルファベットが1文字だけ書かれている。この箱の中からカードを1枚取り出し，書かれているアルファベットを確認してからもとに戻すという試行を繰り返し行う。

$\boxed{A}\boxed{B}$

$\boxed{}\ \boxed{}\cdots$

(1)　箱の中に $\boxed{A}$，$\boxed{B}$ のカードが1枚ずつ全部で2枚入っている場合を考える。

以下では，2以上の自然数 n に対し，n 回の試行でA，Bがそろっているとは，n 回の試行で $\boxed{A}$，$\boxed{B}$ のそれぞれが少なくとも1回は取り出されることを意味する。

(i) 2回の試行でA,Bがそろっている確率

①　②
A　B
B　A

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times 2=\boxed{\frac{1}{2}}$ ア イ

(i)　2回の試行でA，Bがそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\ 1\ }\ ア}{\boxed{\ 2\ }\ イ}$ である。(2点)

(ii)　3回の試行でA，Bがそろっている確率を求める。

例えば，3回の試行のうち $\boxed{A}$ を1回，$\boxed{B}$ を2回取り出す取り出し方は3通りあり，それらをすべて挙げると次のようになる。

1回目	2回目	3回目
A	B	B
B	A	B
B	B	A

3(通り)

AとBの入れかえで
$3\times 2=\boxed{6}$ 通り ウ

①②③
A B B
B A A
B B A
B A A
A B B
A A B
A A A
B B B

6(通り)

2(通り)

$2^3=8$ 通り

を取り出し方全体から引いて
$2^3-2=\boxed{6}$ 通り ウ

このように考えることにより，3回の試行でA，Bがそろっている取り出し方は $\boxed{\ 6\ }$ 通りあることがわかる。よって，3回の試行でA，Bがそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\ 6\ }\ ウ}{2^3}$ である。

ウ(2点)

(iii)　4回の試行でA，Bがそろっている取り出し方は $\boxed{\ 14\ }$ 通りある。よって，4回の試行でA，Bがそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\ 7\ }\ カ}{\boxed{\ 8\ }\ キ}$ である。

エオ(2点)

キ(2点)

AかB　①②③4

$\underset{\text{通り}}{2}\times\underset{\text{通り}}{2}\times\underset{\text{通り}}{2}\times\underset{\text{通り}}{2}=2^4=16$(通り)

A A A A
B B B B　2(通り)をのぞく

4回の試行でA,Bがそろっているのは
$2^4-2=\boxed{14}$(通り)

その確率は $\dfrac{14}{2^4}=\dfrac{14}{16}=\boxed{\dfrac{7}{8}}$ カ キ

(2) 箱の中に $\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ のカードが1枚ずつ全部で3枚入っている場合を考える。

以下では，3以上の自然数 n に対し，n 回目の試行で初めてA，B，Cがそろうとは，n 回の試行で $\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ のそれぞれが少なくとも1回は取り出され，かつ $\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ のうちいずれか1枚が n 回目の試行で初めて取り出されることを意味する。

別 (i) 3回目の試行で初めてA,B,Cがそろうのは 2回目までに2種類そろい，3回目に残りの1種類が取り出されることから　$2\times3=\boxed{6}$（通り）

(i) 3回目の試行で初めてA,B,Cがそろうのは $\boxed{A},\boxed{B},\boxed{C}$ を1枚ずつ取り出すことから $3!=\boxed{6}$（通り）

(i) 3回目の試行で初めてA，B，Cがそろう取り出し方は $\boxed{6}$ ク 通りある。（2点）

よって，3回目の試行で初めてA，B，Cがそろう確率は $\dfrac{\boxed{6}\ ク}{3^3}$ である。

①②　③

①②	③
A,Bがそろう	C
B,Cがそろう	A
C,Aがそろう	B

2(通り)

この考え方 (ii)以降で使う

(ii) 4回目の試行で初めてA，B，Cがそろう確率を求める。

4回目の試行で初めてA，B，Cがそろう取り出し方は，(1)の(ii)を振り返ることにより，$3\times\boxed{6}$ ク 通りあることがわかる。よって，4回目の試行で初めてA，B，Cがそろう確率は $\dfrac{\boxed{2}\ ケ}{\boxed{9}\ コ}$ である。（2点）

(1)(ii) 6通り

①②③	④
A,Bがそろう	C
B,Cがそろう	A
C,Aがそろう	B

$6\times3=18$(通り)

確率は $\dfrac{18}{3^4}=\dfrac{\boxed{2}\ ケ}{\boxed{9}\ コ}$

(iii) 5回目の試行で初めてA，B，Cがそろう取り出し方は $\boxed{42}$ サシ 通りある。（2点）

よって，5回目の試行で初めてA，B，Cがそろう確率は $\dfrac{\boxed{42}\ サシ}{3^5}$ である。

(1)(iii) 14(通り)

①②③④	⑤
A,Bがそろう	C
B,Cがそろう	A
C,Aがそろう	B

$14\times3=\boxed{42}$ サシ 通り

(3)　箱の中に$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$，$\boxed{\mathrm{D}}$のカードが1枚ずつ全部で4枚入っている場合を考える。

以下では，6回目の試行で初めてA，B，C，Dがそろうとは，6回の試行で$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$，$\boxed{\mathrm{D}}$のそれぞれが少なくとも1回は取り出され，かつ$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$，$\boxed{\mathrm{D}}$のうちいずれか1枚が6回目の試行で初めて取り出されることを意味する。

また，3以上5以下の自然数nに対し，6回の試行のうちn回目の試行で初めてA，B，Cだけがそろうとは，6回の試行のうち1回目からn回目の試行で，$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$のそれぞれが少なくとも1回は取り出され，$\boxed{\mathrm{D}}$は1回も取り出されず，かつ$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$のうちいずれか1枚がn回目の試行で初めて取り出されることを意味する。6回の試行のうちn回目の試行で初めてB，C，Dだけがそろうなども同様に定める。

太郎さんと花子さんは，６回目の試行で初めてA，B，C，Dがそろう確率について考えている。

太郎：例えば，５回目までに $\boxed{A}$，$\boxed{B}$，$\boxed{C}$ のそれぞれが少なくとも１回は取り出され，かつ６回目に初めて $\boxed{D}$ が取り出される場合を考えたら計算できそうだね。

花子：それなら，初めてA，B，Cだけがそろうのが，３回目のとき（あ），４回目のとき（い），５回目のとき（う）で分けて考えてみてはどうかな。

６回の試行のうち３回目の試行で初めてA，B，Cだけがそろう取り出し方が $\boxed{6}$（ク）通りであることに注意すると，「６回の試行のうち３回目の試行で初めてA，B，Cだけがそろい，かつ６回目の試行で初めて $\boxed{D}$ が取り出される」取り出し方は $\boxed{54}$（スセ（２点））通りあることがわかる。

同じように考えると，「６回の試行のうち４回目の試行で初めてA，B，Cだけがそろい，かつ６回目の試行で初めて $\boxed{D}$ が取り出される」取り出し方は $\boxed{54}$（ソタ（２点））通りあることもわかる。

以上のように考えることにより，６回目の試行で初めてA，B，C，Dがそろう確率は $\dfrac{\boxed{75}}{\boxed{512}}$（チツ／テトナ）（２点）であることがわかる。

あ 初めてA,B,Cだけがそろうのが３回目のとき

初　A,B,C

①②③ A,B,Cだけがそろう　④ □　⑤ □　⑥ D

(2)(i)　6通り × 3通り × 3通り ＝ $\boxed{54}$ 通り　ソタ

い 初めてA,B,Cだけがそろうのが４回目のとき

初　A,B,C

①②③④ A,B,Cだけがそろう　⑤ □　⑥ D

(2)(ii)　18通り × 3通り ＝ 54(通り)

う 初めてA,B,Cだけがそろうのが３回目のとき

(2)(iii)より　42(通り)

６回目の試行で初めてA,B,C,Dがそろう確率は

あ,い,う それぞれで４(通り)あることから

$$\frac{(54+54+42)\times 4}{4^6} = \frac{150\times 4}{4^5\cdot 4} = \boxed{\frac{75}{512}}$$

チツ　テトナ

補 あ,い,う は５回目までにA,B,Cの３種類がそろわない１種類または２種類をのぞくことを考えて

$3^5 - \{3 + 3(2^5-2)\} = 243 - (3+90) = 150$ (通り)

A,B,C

① □ ② □ ③ □ ④ □ ⑤ □

3通り × 3通り × 3通り × 3通り × 3通り ＝ 3^5 (通り)

１種類　A A A A A ／ B B B B B ／ C C C C C　3(通り)

A,Bのみの２種類／B,Cのみの２種類／C,Aのみの２種類　$3(2^5-2)$(通り)

のぞく