

数学 I ・ 数学 A

第 2 問 (必答問題) (配点 30)

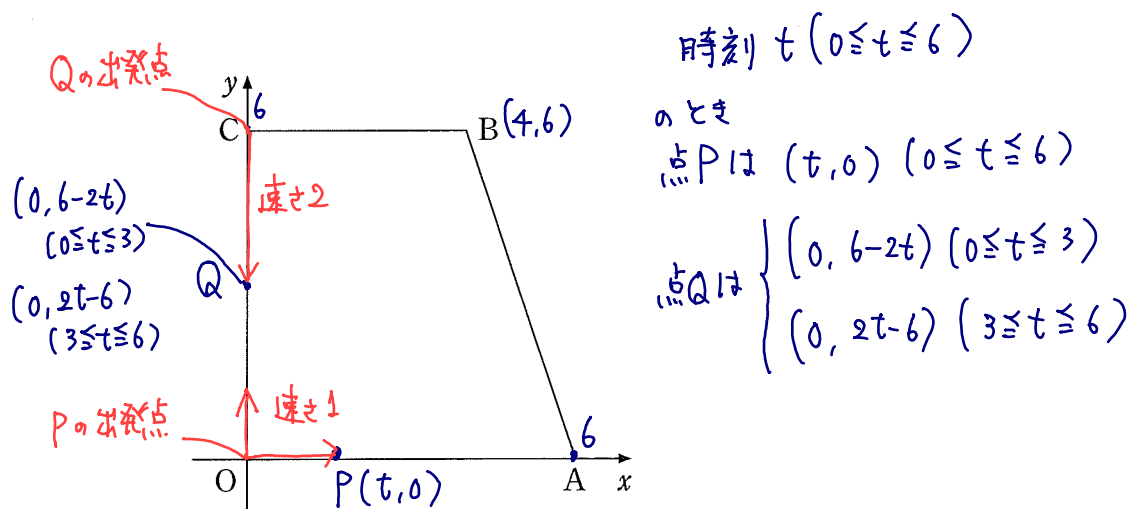
〔1〕 座標平面上に4点 $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(4, 6)$, $C(0, 6)$ を頂点とする台形 $OABC$ がある。また、この座標平面上で、点 P , Q は次の規則に従って移動する。

規則

- P は、 O から出発して毎秒 1 の一定の速さで x 軸上を正の向きに A まで移動し、 A に到達した時点で移動を終了する。
- Q は、 C から出発して y 軸上を負の向きに O まで移動し、 O に到達した後は y 軸上を正の向きに C まで移動する。そして、 C に到達した時点で移動を終了する。ただし、 Q は毎秒 2 の一定の速さで移動する。
- P , Q は同時刻に移動を開始する。

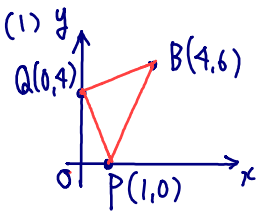
この規則に従って P , Q が移動するとき、 P , Q はそれぞれ A , C に同時刻に到達し、移動を終了する。

以下において、 P , Q が移動を開始する時刻を開始時刻、移動を終了する時刻を終了時刻とする。



参考図

(数学 I ・ 数学 A 第 2 問は次ページに続く。)



$$\vec{PB} = (3, 6)$$

$$\vec{PQ} = (-1, 4)$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} |3 \cdot 4 - 6(-1)| = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9 \rightarrow \text{ア}$$

(1) 開始時刻から 1 秒後の ΔPBQ の面積は 9 である。

$t=1$

ア(3点)

(2) 開始時刻から 3 秒間の ΔPBQ の面積について、面積の最小値は 8

$0 \leq t \leq 3$

イ(3点)

であり、最大値は 12 である。

ウエ(2点)

(3) 開始時刻から終了時刻までの ΔPBQ の面積について、面積の最小値は

$0 \leq t \leq 6$

8 であり、最大値は 13 である。

オ(1点)

カキ(2点)

(4) 開始時刻から終了時刻までの ΔPBQ の面積について、面積が 10 以下となる

$0 \leq t \leq 6$

る時間は $(\text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3} - \sqrt{\text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3}} + \sqrt{\text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2}})$ 秒間である。

ク

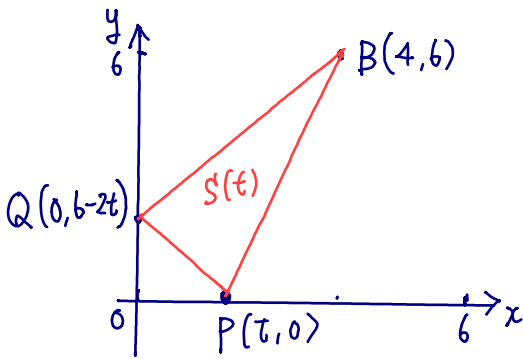
ケ

コ

(4点)

時刻 t における ΔPBQ の面積を $S(t)$ とする

(2) ㊦ $0 \leq t \leq 3$ のとき



$$\vec{PB} = (4-t, 6)$$

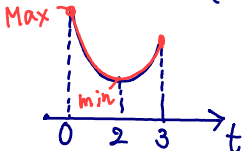
$$\vec{PQ} = (-t, 6-2t)$$

$$S(t) = \frac{1}{2} |(4-t)(6-2t) - 6(-t)|$$

$$= \frac{1}{2} |2t^2 - 8t + 24|$$

$$= t^2 - 4t + 12$$

$$u = S(t) = (t-2)^2 + 8$$

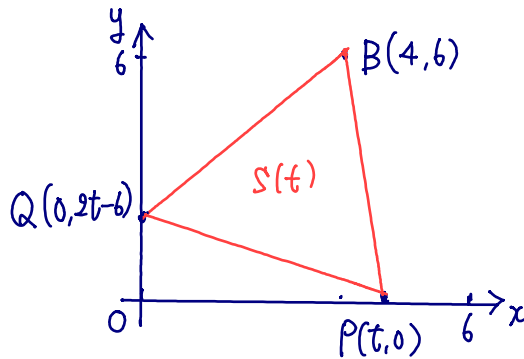


最小値 $S(2) = \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8$ イ

最大値 $S(0) = \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12$ ウエ

㊦ (1) $S(1) = 9$

(3) ㊨ $3 \leq t \leq 6$ のとき



$$\vec{PB} = (4-t, 6)$$

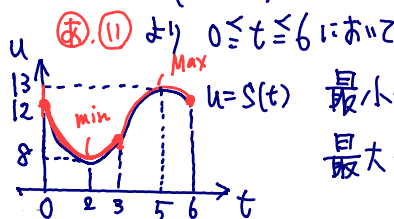
$$\vec{PQ} = (-t, 2t-6)$$

$$S(t) = \frac{1}{2} |(4-t)(2t-6) - 6(-t)|$$

$$= \frac{1}{2} |-2t^2 + 20t - 24|$$

$$= -t^2 + 10t - 12$$

$$= -(t-5)^2 + 13$$



最小値 $S(3) = \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8$ オ

最大値 $S(5) = \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">13$ カキ

(4) ㊦ $0 \leq t \leq 3$ のとき

$$S(t) \leq 10$$

$$\text{とすると } (t-2)^2 + 8 \leq 10$$

$$(t-2)^2 \leq 2$$

$$\therefore 2 - \sqrt{2} \leq t \leq 2 + \sqrt{2}$$

$$0 \leq t \leq 3 \text{ かつ } a \geq$$

$$2 - \sqrt{2} \leq t \leq 3$$

㊨ $3 \leq t \leq 6$ のとき

$$S(t) \leq 10$$

$$\text{とすると } -(t-5)^2 + 13 \leq 10$$

$$(t-5)^2 \geq 3$$

$$\therefore t \leq 5 - \sqrt{3}, 5 + \sqrt{3} \leq t$$

$$3 \leq t \leq 6 \text{ かつ } a \geq$$

$$3 \leq t \leq 5 - \sqrt{3}$$

$$S(t) \leq 10 \text{ となる } t \text{ は}$$

$$\text{㊦, ㊨ あり } 2 - \sqrt{2} \leq t \leq 5 - \sqrt{3}$$

$$\text{かつ } 5 - \sqrt{3} - (2 - \sqrt{2})$$

$$= 3 - \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

クケコ