数学Ⅱ

第４問 （配点　20）

座標平面において，方程式 $x^2 + y^2 = 4$ が表す円を C_1，$x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$ が表す円を C_2 とする。

必要に応じて，次のことを用いてもよい。

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離を d とするとき

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となる。

(1)　C_2 の中心は点 $\left(\boxed{\ 4\ },\ \boxed{\ 0\ }\right)$，半径は $\boxed{\ 1\ }$ である。
ア　イ (2点)　ウ (2点)

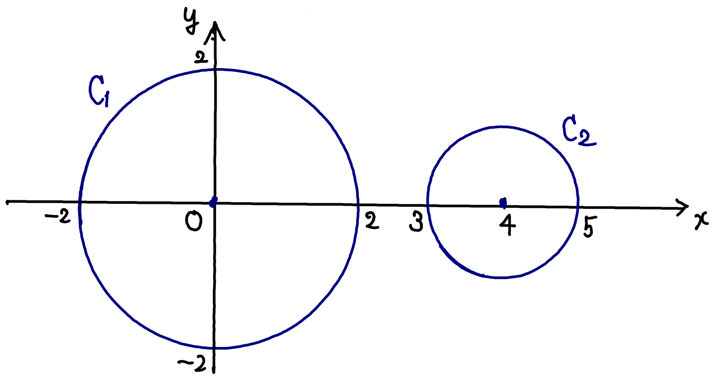
円 C_1 : $x^2 + y^2 = 4$

中心は原点 $(0,0)$，半径は 2

円 C_2 : $x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$

$(x-4)^2 + y^2 = 1$

中心は点 $\boxed{(4,0)}$ ，半径は $\boxed{1}$
アイ　ウ



(2) C_1 と C_2 の両方に接する直線の方程式を求める方法について考えよう。

次の**方針**に基づいて考える。

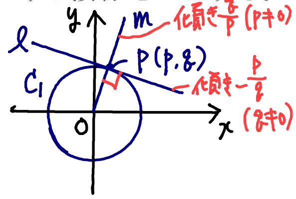
方針

C_1 の接線のうち，C_2 にも接するものを求める。

C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ をとり，P における C_1 の接線を ℓ とする。P は C_1 上にあるので

$$p^2+q^2=4 \quad \cdots ①$$

が成り立つ。



mの傾きは直線OPの傾きより $\boxed{\frac{q}{p}}$ ⑧エ

ℓ⊥mより ℓとmの傾きの積は−1なので ℓの傾きは $\boxed{-\frac{p}{q}}$ ⓑオ

(i) ℓ の方程式を求めよう。

$p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ の場合を考える。原点 $(0,\ 0)$ と P を結ぶ直線を m とすると，ℓ と m は垂直である。m の傾きは $\boxed{\text{エ}}$ ⑧ $\frac{q}{p}$ エ (2点) であるので，ℓ の傾きは $-\frac{p}{q}$ $\boxed{\text{オ}}$ ⓑ オ (2点) となる。よって，ℓ の方程式は $\boxed{\text{カ}}$ ④ $px+qy=4$ カ (3点) となる。

$p=0$ または $q=0$ の場合も，$\boxed{\text{カ}}$ カ $px+qy=4$ の表す直線は，P における C_1 の接線となることがわかる。

ℓの方程式は $y=-\frac{p}{q}(x-p)+q$

両辺にqをかけて

$qy=-p(x-p)+q^2$

$=-px+p^2+q^2$

$=-px+4$

(∵①)

よって $\boxed{px+qy=4}$ ④カ

↑ 公式で知っておくべき

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ p	① q	② $-p$	③ $-q$
④ $\frac{1}{p}$	⑤ $\frac{1}{q}$	⑥ $-\frac{1}{p}$	⑦ $-\frac{1}{q}$
⑧ $\frac{q}{p}$ エ	⑨ $\frac{p}{q}$	ⓐ $-\frac{q}{p}$	ⓑ $-\frac{p}{q}$ オ

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $px+qy=2$	① $px-qy=2$	② $qx+py=2$
③ $qx-py=2$	④ $px+qy=4$	⑤ $px-qy=4$
⑥ $qx+py=4$	⑦ $qx-py=4$	

(ii)　ℓ が C_2 に接するのは，$\boxed{\text{④}}$ ときである。

キ (3点)

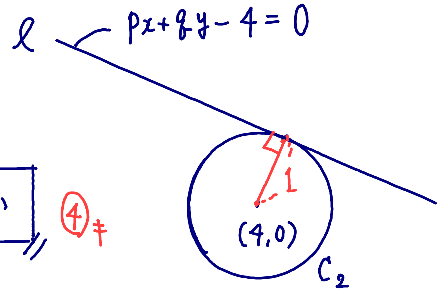
$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪	ℓ が x 軸に平行である
①	ℓ が y 軸に平行である
②	ℓ が C_2 の中心を通る
③	C_2 の中心と ℓ の距離が，C_1 の半径に等しい
④	C_2 の中心と ℓ の距離が，C_2 の半径に等しい

$p^2+q^2=4$ …①

のもとで

$\ell : px+qy=4$



ℓ が C_2 に接するのは

$\boxed{C_2 \text{の中心と} \ell \text{の距離が，} C_2 \text{の半径に等しい}}$ ④キ

ときである．

(iii) これより $\dfrac{|p\cdot 4+q\cdot 0-4|}{\sqrt{p^2+q^2}}=1$

①から $\dfrac{|4(p-1)|}{\sqrt{4}}=1$

$|p-1|=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ p=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$

$p=\dfrac{1}{2}$ ならば ① は $q^2=\dfrac{15}{4}$

$\therefore\ q=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$p=\dfrac{3}{2}$ ならば ① は $q^2=\dfrac{7}{4}$

$\therefore\ q=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

よって ℓ が C_2 に接するときの P の座標は

$$(p,\ q)=\boxed{\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right),\ \left(\dfrac{3}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)}$$

ク コサ
ケ シ
ス ソ
セ タ

(iii)　(i)，(ii) での考察から，次のことがわかる。

ℓ が C_2 に接するときの P の座標は

$$(p,\ q)=\left(\frac{\boxed{1}\,ク}{\boxed{2}\,ケ},\ \frac{\sqrt{\boxed{15}}\,コサ}{\boxed{2}\,シ}\right),\quad \left(\frac{\boxed{1}\,ク}{\boxed{2}\,ケ},\ -\frac{\sqrt{\boxed{15}}\,コサ}{\boxed{2}\,シ}\right),$$

(3点)

$$\left(\frac{\boxed{3}\,ス}{\boxed{2}\,セ},\ \frac{\sqrt{\boxed{7}}\,ソ}{\boxed{2}\,タ}\right),\quad \left(\frac{\boxed{3}\,ス}{\boxed{2}\,セ},\ -\frac{\sqrt{\boxed{7}}\,ソ}{\boxed{2}\,タ}\right)$$

(3点)

である。ただし，$\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}<\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ とする。よって，これらの p，q の組を $\boxed{}$ カ に代入すれば，C_1 と C_2 の両方に接する直線の方程式が得られる。

$px+qy=4$

(補) C_1 と C_2 の両方に接する直線は4本ある。
点Pは x 軸対称である。