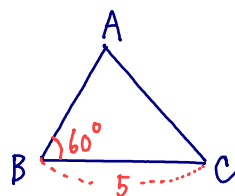


数学 I

第 2 問 (配点 30)

〔1〕 $\triangle ABC$ において、 $BC = 5$ 、 $\angle ABC = 60^\circ$ とする。

(10点)



(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径が $\sqrt{7}$ のとき、 $AC = \sqrt{\boxed{21}}$ であり、

$AB = \boxed{1}$ または $AB = \boxed{4}$ である。ただし、 $\boxed{\text{ウ}}$ 、 $\boxed{\text{エ}}$

の解答の順序は問わない。

したがって、外接円の半径が $\sqrt{7}$ であるような $\triangle ABC$ は二つある。

$\triangle ABC$ に正弦定理を用いて

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{7}$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\sqrt{21}} \text{ ア}$$

$$AB = x (> 0)$$

よって $\triangle ABC$ に余弦定理を用いて

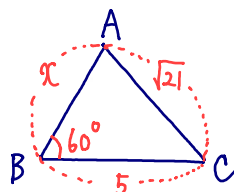
$$(\sqrt{21})^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$$

$$21 = x^2 + 25 - 5x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = \boxed{1, 4} \text{ エ, オ}$$



(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とするとき、 $R = \frac{5}{2}$ または

$R \geq \frac{5}{3}$ であることは、 $\triangle ABC$ が一通りに決まるための必要十分条件である。

(1) と同様に考える

$\triangle ABC$ に正弦定理を用いて

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore AC = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}R$$

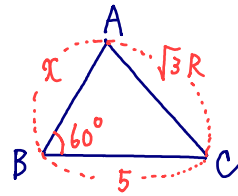
$$AB = x (> 0)$$

よって $\triangle ABC$ に余弦定理を用いて

$$(\sqrt{3}R)^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$$

$$3R^2 = x^2 + 25 - 5x$$

$$= x^2 - 5x + 25$$



$\triangle ABC$ が一通りに決まる必要十分条件は上の式をみたす $x > 0$ とする x がただ一つあることである。

これは

$$\begin{cases} y = 3R^2 \\ y = x^2 - 5x + 25 \\ = (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{75}{4} \end{cases}$$

のグラフが $x > 0$ でただ一つの共有点をもつことから

$$3R^2 = \frac{75}{4} \quad \text{または} \quad 3R^2 \geq 25$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{25}{4} \quad \text{または} \quad R^2 \geq \frac{25}{3}$$

$$\therefore R = \frac{5}{2} \quad \text{または} \quad R \geq \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

