

数学 I

$$U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

[2] 全体集合 U を 2 以上 9 以下の自然数全体の集合とする。 a, b, c, d は U の

(10点) 異なる要素とする。また、 U の部分集合 A, B, C, D を 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$$A = \{n \mid n \text{ は } U \text{ の要素かつ } a \text{ の倍数}\}$$

$$B = \{n \mid n \text{ は } U \text{ の要素かつ } b \text{ の倍数}\}$$

$$C = \{n \mid n \text{ は } U \text{ の要素かつ } c \text{ の倍数}\}$$

$$D = \{n \mid n \text{ は } U \text{ の要素かつ } d \text{ の倍数}\}$$

とする。

なお、 $A \cup B \cup C$ とは、 $(A \cup B) \cup C$ のことであり、 $A \cup B \cup C \cup D$ とは、 $(A \cup B \cup C) \cup D$ のことである。

(1) $a = 4, b = 5$ のとき

$$A \cup B = \left\{ \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{8} \right\}$$

シ ス セ (2点)

である。ただし、 $\boxed{\text{シ}} < \boxed{\text{ス}} < \boxed{\text{セ}}$ とする。

$a=4, b=5$ のとき

$$A = \{4, 8\}$$

$$B = \{5\}$$

よ) $A \cup B = \{4, 5, 8\}$

シ ス セ

(2) $a = 2, b = 3$ のとき

$$A \cap \bar{B} = \left\{ \boxed{2}, \boxed{4}, \boxed{8} \right\}$$

ソ タ チ (2点)

である。ただし、 $\boxed{\text{ソ}} < \boxed{\text{タ}} < \boxed{\text{チ}}$ とする。

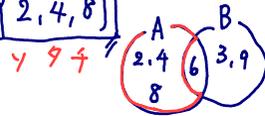
$a=2, b=3$ のとき

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{3, 6, 9\}$$

AからA∩B
← a6をのぞく

$$A \cap \bar{B} = \{2, 4, 8\}$$



この不等式に注意

(3) 以下, $a < b < c < d$ とする。

$a=2, b=3$ のとき $3 < c < d \leq 9$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

$\overline{A \cup B} = \{5, 7\}$

$\overline{A \cup B} = \overline{C \cap D} = C \cup D$

よって $C = \{5\}, D = \{7\}$

(i) $a=2, b=3$ のとき, $A \cup B = \overline{C \cap D}$ が成り立つのは,

$c = \boxed{5}$, $d = \boxed{7}$ のときである。
ツ テ (2点)

(ii) $A \cup B \cup C \cup D = U$ が成り立つのは, $a = \boxed{2}$, $b = \boxed{3}$,

$c = \boxed{5}$, $d = \boxed{7}$ のときである。
ニ ヌ (2点)

$A \cup B \cup C \cup D = U$ になるには
 $2 \in U, 3 \in U, 5 \in U, 7 \in U$ となる要素があるから

$a=2, b=3, c=5, d=7$ となる。

(iii) $a=2$ であることは, $\{2, 6, 8\} \subset A \cup B \cup C$ であるための

$\boxed{2}$ 。
ネ (1点)

また, $b=6$ であることは, $\{2, 6, 8\} \subset A \cup B \cup C$ であるための $\boxed{3}$ 。
ノ (1点)

逆にも $a=2$ のとき
 $A = \{2, 4, 6, 8\}$
 $B = \{3, 6, 9\}$
 $C = \{5\}$
 $D = \{7\}$

よって $A \cup B \cup C \cup D = U$

$\boxed{ネ}$, $\boxed{ノ}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- 必要条件であるが, 十分条件ではない
- ① 十分条件であるが, 必要条件ではない
- ② 必要十分条件である
- ③ 必要条件でも十分条件でもない

真を○, 偽をXとする。

$a=2 \iff \{2, 6, 8\} \subset A \cup B \cup C$ $\boxed{①}$ 〴〵

$b=6 \iff \{2, 6, 8\} \subset A \cup B \cup C$ $\boxed{③}$ 〴〵

○の証明 $a=2$ があるとき
 $A = \{2, 4, 6, 8\}$
あるから
 $\{2, 6, 8\} \subset A$
よって
 $\{2, 6, 8\} \subset A \cup B \cup C$

$b=6$ があるとき
 $B = \{6\}$
あるから
 $a=5, c=7$
とすると $A = \{5\}$
 $C = \{7\}$
よって $A \cup B \cup C = \{5, 6, 7\}$

○の証明 $\{2, 6, 8\} \subset A \cup B \cup C$ があるとき
 $a \neq 2$ とすると $3 \leq a < b < c$ となり $\leftarrow a$ の倍数
 $2 \notin A \cup B \cup C$ であるからみたさない $\leftarrow b$ の倍数
よって $a=2$ $\leftarrow c$ の倍数
よって $a=2$

Xの反例 $\{2, 6, 8\} \subset A \cup B \cup C$ があるとき
 $a=2, b=3$
とすると $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$
 $B = \{3, 6, 9\}$
 $C = \{5, 7\}$
 $D = \{7\}$
よって $A \cup B \cup C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = U$
よって $b=6$ であるが $\{2, 6, 8\} \not\subset A \cup B \cup C$