第５問　（選択問題）（配点　20）

平面上の点Oを中心とする半径1の円周上に，3点A，B，Cがあり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{2}{3}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たすとする。t を $0<t<1$ を満たす実数とし，線分ABを $t:(1-t)$ に内分する点をPとする。また，直線OP上に点Qをとる。

(1)　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

また，実数 k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と表せる。したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{\text{オ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\boxed{\text{カ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が垂直となるのは，$t=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである。

$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　kt	①　$(k-kt)$	②　$(kt+1)$
③　$(kt-1)$	④　$(k-kt+1)$	⑤　$(k-kt-1)$

（数学Ⅱ・数学B第５問は次ページに続く。）

以下，$t \neq \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ とし，∠OCQ が直角であるとする。

(2)　∠OCQ が直角であることにより，(1) の k は

$$k = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}\,t - \boxed{\text{シ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

となることがわかる。

平面から直線 OA を除いた部分は，直線 OA を境に二つの部分に分けられる。そのうち，点 B を含む部分を D_1，含まない部分を D_2 とする。また，平面から直線 OB を除いた部分は，直線 OB を境に二つの部分に分けられる。そのうち，点 A を含む部分を E_1，含まない部分を E_2 とする。

- $0 < t < \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{ス}}$。
- $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} < t < 1$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{セ}}$。

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる
①　D_1 に含まれ，かつ E_2 に含まれる
②　D_2 に含まれ，かつ E_1 に含まれる
③　D_2 に含まれ，かつ E_2 に含まれる

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

⑶　太郎さんと花子さんは，点 P の位置と $|\overrightarrow{OQ}|$ の関係について考えている。

$t=\frac{1}{2}$ のとき，① と ② により，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ とわかる。

太郎：$t \neq \frac{1}{2}$ のときにも，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる場合があるかな。

花子：$|\overrightarrow{OQ}|$ を t を用いて表して，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ を満たす t の値について考えればいいと思うよ。

太郎：計算が大変そうだね。

花子：直線 OA に関して，$t=\frac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R としたら，$|\overrightarrow{OR}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となるよ。

太郎：$\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表すことができれば，t の値が求められそうだね。

直線 OA に関して，$t=\frac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると

$$\overrightarrow{CR}=\boxed{\text{タ}}\,\overrightarrow{CQ}$$
$$=\boxed{\text{チ}}\,\overrightarrow{OA}+\boxed{\text{ツ}}\,\overrightarrow{OB}$$

となる。

$t \neq \frac{1}{2}$ のとき，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる t の値は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。