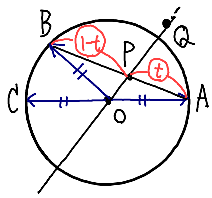
第５問　（選択問題）（配点　20）



$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$

平面上の点Oを中心とする半径1の円周上に，3点A，B，Cがあり，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{2}{3}$ および $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ を満たすとする。t を $0<t<1$ を満たす実数とし，線分ABを $t:(1-t)$ に内分する点をPとする。また，直線OP上に点Qをとる。

(1)　$\cos\angle AOB=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

アイ：-2　ウ：3　(1点)

また，実数 k を用いて，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ と表せる。したがって

$$\overrightarrow{OQ}=\boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{OA}+\boxed{\text{オ}}\,\overrightarrow{OB}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$$\overrightarrow{CQ}=\boxed{\text{カ}}\,\overrightarrow{OA}+\boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{OB}$$

となる。

エ：$(k-kt)$ ①　オ：kt ⓪　(2点)
カ：$(k-kt+1)$ ④　キ：kt ⓪　(2点)

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ が垂直となるのは，$t=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである。

ク：3　ケ：5　(2点)

$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　kt	①　$(k-kt)$	②　$(kt+1)$
③　$(kt-1)$	④　$(k-kt+1)$	⑤　$(k-kt-1)$

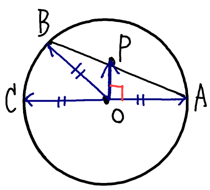
オ キ：⓪　エ：①　カ：④

$\cos\angle AOB$
$=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$
$=\boxed{-\dfrac{2}{3}}$ アイ ウ

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$
$=\boxed{k(1-t)}\overrightarrow{OA}+\boxed{kt}\overrightarrow{OB}$ ‥①
①エ　⓪オ

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC}$
$=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}$ $(\because\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA})$ と①
$=\boxed{(k-kt+1)}\overrightarrow{OA}+\boxed{kt}\overrightarrow{OB}$
④カ　⓪キ

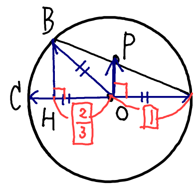


$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OP}$ となるのは $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}\cdot\{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\}$
$=(1-t)|\overrightarrow{OA}|^2+t\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
$=(1-t)\ -\dfrac{2}{3}t$
$=1-\dfrac{5}{3}t$
$=-\dfrac{5}{3}\left(t-\dfrac{3}{5}\right)$

これが0になるので　$t=\boxed{\dfrac{3}{5}}$ ク ケ

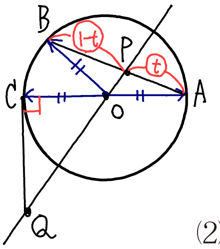
(補) 点Bから直線CAへ垂線BHを下ろすと
PO // BH



$\cos\angle AOB=-\dfrac{2}{3}$ からわかる

$AP:PB=OA:OH$
$=1:\dfrac{2}{3}$
$=3:2$

点Pは線分ABを $\boxed{\dfrac{3}{5}}$ ク $:\dfrac{2}{5}$ に内分する ケ



以下，$t \neq \frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$ ク ケ とし，∠OCQ が直角であるとする。

∠OCQ $=\frac{\pi}{2}$ とすると $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{OA}\cdot\{(k-kt+1)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}\}$

$= -(k-kt+1)|\overrightarrow{OA}|^2 - kt\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$= -k+kt-1+\frac{2}{3}kt$

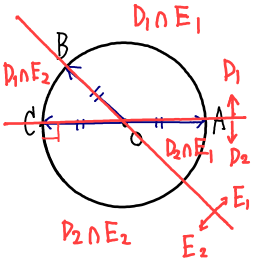
$= \frac{5t-3}{3}k-1$

これが 0 になるので $k=\frac{\boxed{3}}{\boxed{5t-3}}$ コ サシ …②

(2)　∠OCQ が直角であることにより，(1) の k は

$$k = \frac{\boxed{3}}{\boxed{5}\,t - \boxed{3}}$$ コ サ シ (2点) ……………………………… ②

となることがわかる。



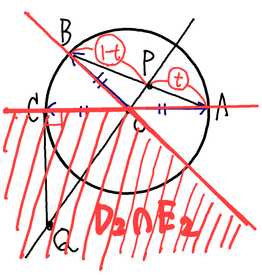
平面から直線 OA を除いた部分は，直線 OA を境に二つの部分に分けられる。そのうち，点 B を含む部分を D_1，含まない部分を D_2 とする。また，平面から直線 OB を除いた部分は，直線 OB を境に二つの部分に分けられる。そのうち，点 A を含む部分を E_1，含まない部分を E_2 とする。

- $0 < t < \frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$ ク ケ ならば，点 Q は $\boxed{3}$。ス (2点)　D_2 に含まれ，かつ E_1 に含まれる
- $\frac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$ ク ケ $< t < 1$ ならば，点 Q は $\boxed{0}$。セ (2点)　D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる

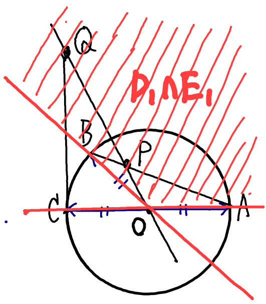
$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

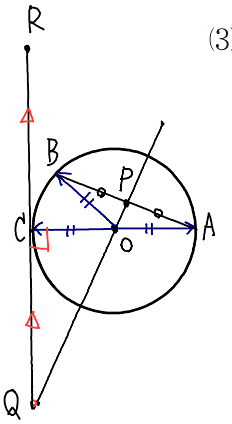
セ ⓪ D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる
① D_1 に含まれ，かつ E_2 に含まれる
② D_2 に含まれ，かつ E_1 に含まれる
ス ③ D_2 に含まれ，かつ E_2 に含まれる

- $0<t<\frac{3}{5}$ ならば
  $5t-3<0$
  なので ② から
  $k<0$
  $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$
  であるから
  点Q は 点O に関して点P と反対側にある
  点P は $D_1\cap E_1$ にあるので 点Q は $\boxed{D_2\cap E_2}$ にある
  ③ ス



- $\frac{3}{5}<t<1$ ならば
  $5t-3>0$
  なので ② から
  $k>0$
  $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$
  であるから
  点Q は 点O に関して点P と同じ側にある.
  点P および 点Q は $\boxed{D_1\cap E_1}$ にある
  ⓪ セ





(3) 太郎さんと花子さんは，点 P の位置と $|\overrightarrow{OQ}|$ の関係について考えている。

$t=\frac{1}{2}$ のとき，① と ② により，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{6}}$ とわかる。

ソ(2点)

補 大変そうな計算をやってみました。

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ $\left(k=\frac{3}{5t-3}\right)$

$|\overrightarrow{OQ}|^2=k^2|\overrightarrow{OP}|^2$

$=k^2|(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}|^2$

$=k^2\left\{(1-t)^2+2t(1-t)\left(-\frac{2}{3}\right)+t^2\right\}$

$=k^2\left(1-2t+t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{3}t^2+t^2\right)$

$=k^2\left(\frac{10}{3}t^2-\frac{10}{3}t+1\right)$

$=\left(\frac{3}{5t-3}\right)^2\cdot\frac{10t^2-10t+3}{3}$

$=\frac{3(10t^2-10t+3)}{(5t-3)^2}$

これが $|\overrightarrow{OQ}|^2=(\sqrt{6})^2=6$ になるので

$3(10t^2-10t+3)=6(5t-3)^2$

$10t^2-10t+3=2(25t^2-30t+9)$

$40t^2-50t+15=0$

$8t^2-10t+3=0$

$(2t-1)(4t-3)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}$

太郎：$t\neq\frac{1}{2}$ のときにも，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{6}}$ となる場合があるかな。 ソ

花子：$|\overrightarrow{OQ}|$ を t を用いて表して，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{6}}$ を満たす t の値について考えればいいと思うよ。 ソ

太郎：計算が大変そうだね。 ← 右上で念のためやってみましたが，大変でした…

花子：直線 OA に関して，$t=\frac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とした ら，$|\overrightarrow{OR}|=\sqrt{\boxed{6}}$ となるよ。 ソ

太郎：$\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表すことができれば，t の値が求められそうだね。

$t=\frac{1}{2}$ のとき

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

② より

$k=\frac{3}{5\cdot\frac{1}{2}-3}=\frac{3}{-\frac{1}{2}}$

$=-6$

$\overrightarrow{OQ}=-6\overrightarrow{OP}$

$|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2$

$=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2)$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{4}{3}+1\right)$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{6}$

$\therefore |\overrightarrow{OP}|=\frac{1}{\sqrt{6}}$

$|\overrightarrow{OQ}|=6|\overrightarrow{OP}|$

$=6\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}$

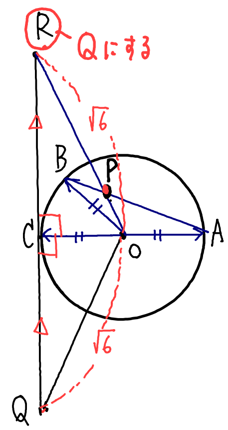
$=\boxed{\sqrt{6}}$ ソ

直線 OA に関して，$t=\frac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると

$\overrightarrow{CR}=\boxed{-}\overrightarrow{CQ}$ タ(1点)

$=\boxed{2}\overrightarrow{OA}+\boxed{3}\overrightarrow{OB}$ チ ツ (1点)

となる。



$t\neq\frac{1}{2}$ のとき，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{6}}$ となる t の値は $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$ である。 ソ テ ト(3点)

直線 OA に関して $t=\frac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると

$|\overrightarrow{OR}|=|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{CR}=\boxed{-}\overrightarrow{CQ}$ タ

$=-(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC})$

$=6\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}$ $(\because \overrightarrow{OQ}=-6\overrightarrow{OP})$

$=6\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)-\overrightarrow{OA}$

$=\boxed{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}$ チ ツ

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CR}$

$=-\overrightarrow{OA}+(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$

$=4\left(\underbrace{\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}}_{\text{たしたら}1}\right)$

直線 OR と直線 AB の交点に P があるとすると

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$

なので点 P は線分 AB を $3:1=\frac{3}{4}:\frac{1}{4}$ に内分する $\left(t=\frac{3}{4}\right)$

$t=\frac{3}{4}$ のとき R を Q とすると

$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{6}$ かつ $\angle OCQ=\frac{\pi}{2}$

をみたす，

よって $t\neq\frac{1}{2}$ のとき $|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{6}$ となる

t の値は $t=\boxed{\frac{3}{4}}$ テ ト