第3問 （選択問題）（配点　20）

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて41ページの正規分布表を用いてもよい。

ジャガイモを栽培し販売している会社に勤務する花子さんは，A地区とB地区で収穫されるジャガイモについて調べることになった。

(1) A地区で収穫されるジャガイモには1個の重さが200gを超えるものが25％含まれることが経験的にわかっている。花子さんはA地区で収穫されたジャガイモから400個を無作為に抽出し，重さを計測した。そのうち，重さが200gを超えるジャガイモの個数を表す確率変数をZとする。このときZは二項分布$B\left(400,\ 0.\boxed{25}\right)$に従うから，$Z$の平均(期待値)は$\boxed{100}$である。

アイ（2点）　ウエオ（2点）

1個が200gを超えるジャガイモとなる確率は $\frac{25}{100}=0.25$

よって Zは $B\left(400,\boxed{0.25}\right)$ に従う

アイ

Zの平均は
$E(Z)=400\cdot 0.25=400\cdot\frac{1}{4}$
$=\boxed{100}$

ウエオ

(2) Z を(1)の確率変数とし，A 地区で収穫されたジャガイモ 400 個からなる標本において，重さが 200 g を超えていたジャガイモの標本における比率を $R = \frac{Z}{400}$ とする。このとき，R の標準偏差は $\sigma(R) = \boxed{②}$ $\frac{\sqrt{3}}{80}$ である。
カ(2点)

標本の大きさ 400 は十分に大きいので，R は近似的に正規分布 $N\left(0.\boxed{25},\ \left(\frac{\sqrt{3}}{80}\right)^2\right)$ に従う。

したがって，$P(R \geqq x) = 0.0465$ となるような x の値は $\boxed{②}$ 0.286 となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ の計算においては $\sqrt{3} = 1.73$ とする。
キ(2点)

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $\frac{3}{6400}$	① $\frac{\sqrt{3}}{4}$	② $\frac{\sqrt{3}}{80}$	③ $\frac{3}{40}$

$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 0.209	① 0.251	② 0.286	③ 0.395

標本比率を $R = \frac{Z}{400}$ とすると

$$\sigma(R) = \frac{1}{400}\sigma(Z) = \frac{1}{400}\sqrt{400\cdot 0.25\cdot 0.75} = \frac{1}{400}\sqrt{400\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{1}{400}\sqrt{25\cdot 3} = \frac{5}{400}\sqrt{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{80}}$$

②カ

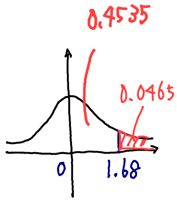
R の平均は $E(R) = \frac{1}{400}E(Z) = \frac{1}{400}\cdot 100 = \frac{1}{4} = 0.25$

R は近似的に $N\left(0.25,\ \left(\frac{\sqrt{3}}{80}\right)^2\right)$ に従う

$Y = \frac{R-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}$ とすると

Y は $N(0,1)$ に従う.

$$P(R \geqq x) = P\left(\frac{R-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}} \geqq \frac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right) = P\left(Y \geqq \frac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}\right)$$



$0.5 - 0.0465 = 0.4535$

正規分布表より $P(Y \geqq 1.68) = 0.4535$ なので

$\frac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}} = 1.68$

よって

$$x = 0.25 + 1.68\cdot\frac{\sqrt{3}}{80} = 0.25 + \frac{\overset{21}{\cancel{168}}}{100}\cdot\frac{1.73}{\underset{10}{\cancel{80}}} = 0.25 + \frac{36.33}{1000}$$

$= 0.25 + 0.03633 = 0.28633$

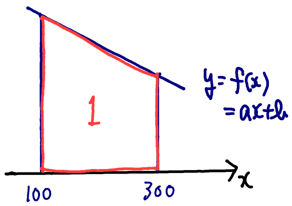
$\fallingdotseq \boxed{0.286}$ ②キ

$$\begin{array}{r} 1.73 \\ \times\ \ 21 \\ \hline 173 \\ 346\ \\ \hline 36.33 \end{array}$$

(3) B地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモ1個の重さは100 g から300 g の間に分布している。B地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモ1個の重さを表す確率変数を X とするとき，X は連続型確率変数であり，X のとり得る値 x の範囲は $100 \leqq x \leqq 300$ である。

花子さんは，B地区で収穫され，出荷される予定のすべてのジャガイモのうち，重さが200 g 以上のものの割合を見積もりたいと考えた。そのために花子さんは，X の確率密度関数 $f(x)$ として適当な関数を定め，それを用いて割合を見積もるという方針を立てた。

B地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモから206個を無作為に抽出したところ，重さの標本平均は180 g であった。図1はこの標本のヒストグラムである。



$P(100 \leqq X \leqq 300) = \boxed{1}$ ケ

$\int_{100}^{300} f(x)dx = \int_{100}^{300}(ax+b)dx$
$= \left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{100}^{300}$
$= \frac{a}{2}(300^2-100^2)+b(300-100)$
$= \frac{a}{2}\cdot 80000 + 200b$
$= 40000a+200b$

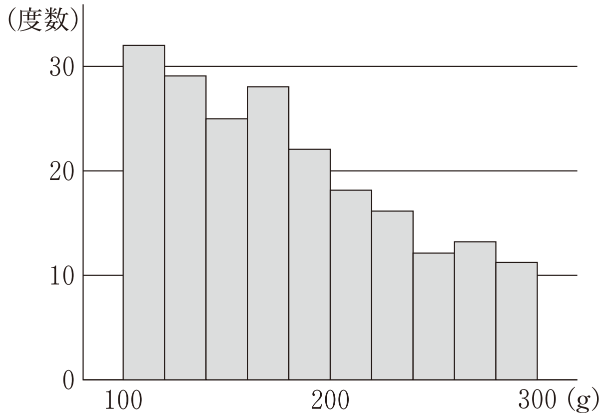
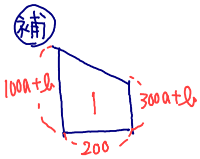


図1　ジャガイモの重さのヒストグラム

よって
$\boxed{4\cdot 10^4 a + 2\cdot 10^2 b = 1}$ …①
ケ　コ

補



$= \frac{1}{2}\{(100a+b)+(300a+b)\}\cdot 200$
$= 100(400a+2b)$
$= 40000a+200b$

台形の面積を考えてもよい

花子さんは図1のヒストグラムにおいて，重さ x の増加とともに度数がほぼ一定の割合で減少している傾向に着目し，X の確率密度関数 $f(x)$ として，1次関数

$$f(x) = ax + b \qquad (100 \leqq x \leqq 300)$$

を考えることにした。ただし，$100 \leqq x \leqq 300$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ とする。

このとき，$P(100 \leqq X \leqq 300) = \boxed{1}$ であることから
ケ(2点)

$$\boxed{4} \cdot 10^4 a + \boxed{2} \cdot 10^2 b = \boxed{1} \quad \cdots\cdots ①$$

ケ　コ　(2点)

である。

花子さんは，X の平均（期待値）が重さの標本平均 180 g と等しくなるように確率密度関数を定める方法を用いることにした。

連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $100 \leqq x \leqq 300$ で，その確率密度関数が $f(x)$ のとき，X の平均（期待値）m は

$$m = \int_{100}^{300} x f(x)\,dx = \int_{100}^{300} (ax^2+bx)\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_{100}^{300} = \frac{a}{3}(300^3-100^3)+\frac{b}{2}(300^2-100^2)$$
$$= \frac{26}{3}\cdot 10^6 a + 4\cdot 10^4 b$$

で定義される。この定義と花子さんの採用した方法から

←計算しなくても結果がかいてある

$$m = \frac{26}{3}\cdot 10^6 a + 4\cdot 10^4 b = 180 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる。① と ② により，確率密度関数は

$$f(x) = -\boxed{3}\cdot 10^{-5}x + \boxed{11}\cdot 10^{-3} \qquad \cdots\cdots ③$$

サ（2点）　シス（2点）

と得られる。このようにして得られた ③ の $f(x)$ は，$100 \leqq x \leqq 300$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ を満たしており，確かに確率密度関数として適当である。

したがって，この花子さんの方針に基づくと，B 地区で収穫され，出荷される予定のすべてのジャガイモのうち，重さが 200 g 以上のものは $\boxed{35}$ % あると見積もることができる。

② セ（3点）

$\boxed{セ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 33	① 34	② 35	③ 36

$$\begin{cases} 4\cdot10^4 a + 2\cdot10^2 b = 1 & \cdots① \\ \frac{26}{3}\cdot10^6 a + 4\cdot10^4 b = 180 & \cdots② \end{cases}$$

①×$2\cdot10^2$ として

$$8\cdot10^6 a + 4\cdot10^4 b = 200 \quad \cdots①'$$

②−①′ として

$$\frac{2}{3}\cdot10^6 a = -20$$
$$\therefore\ a = -\frac{3}{10^5}$$

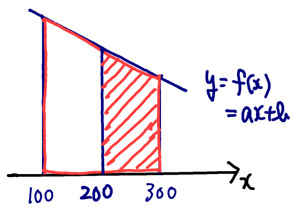
①へ代入して

$$4\cdot10^4\left(-\frac{3}{10\cdot10^4}\right)+2\cdot10^2 b = 1$$
$$-\frac{6}{5}+2\cdot10^2 b = 1$$
$$2\cdot10^2 b = \frac{11}{5}$$
$$\therefore\ b = \frac{11}{10^3}$$

よって $f(x) = \boxed{-3\cdot10^{-5}x + 11\cdot10^{-3}}$ …③

サ　シス

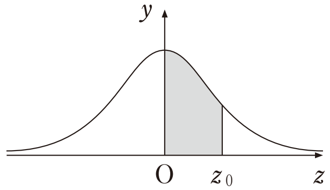
$$P(200 \leqq X \leqq 300) = \int_{200}^{300} f(x)\,dx = \int_{200}^{300}(ax+b)\,dx$$
$$= \left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{200}^{300}$$
$$= \frac{a}{2}(300^2-200^2)+b(300-200)$$
$$= -\frac{3}{10^5}\cdot\frac{1}{2}\cdot5\cdot10^4+\frac{11}{10^3}\cdot10^2$$
$$= -\frac{7.5}{10}+\frac{11}{10}$$
$$= \frac{3.5}{10}$$
$$= 0.35$$



よって重さが 200g 以上のものは $\boxed{35}$ % と見積もることができる。②セ

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990