第2問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 a を実数とし，$f(x)=x^3-6ax+16$ とおく。

(配点18点)

$f'(x)=3x^2-6a$

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形は

$a=0$ のとき，$\boxed{①}$ ア（2点）

$a<0$ のとき，$\boxed{⓪}$ イ（2点）

である。

$a=0$ のとき

$f'(x)=3x^2$

x	…	0	…
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	6	↗

$f(x)$ は単調増加

$x=0$ のとき $y=f(x)$ の接線の傾きが0

よって $y=f(x)$ のグラフの概形は $\boxed{①}$ ア

$a<0$ のとき

$-6a>0$ なので

$f'(x)=3x^2-6a>0$

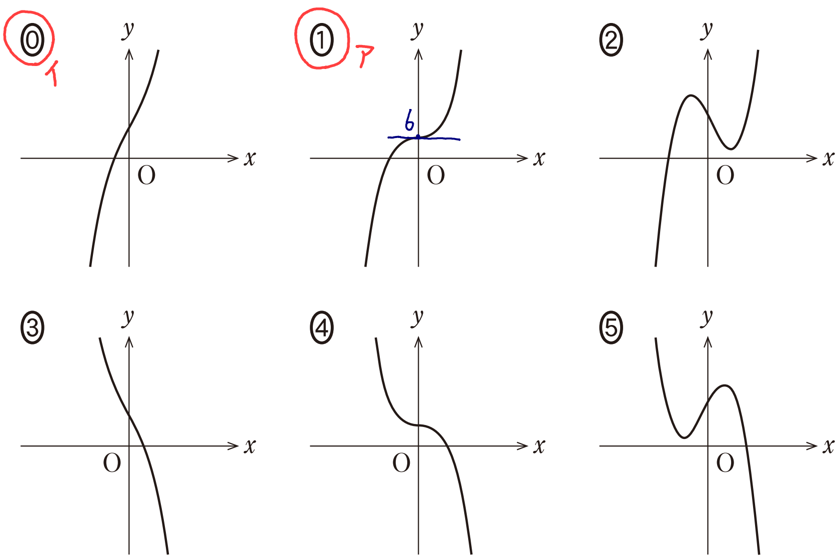
$y=f(x)$ の接線の傾きは

つねに正

よって $y=f(x)$ のグラフの概形は

$\boxed{②}$ イ

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。



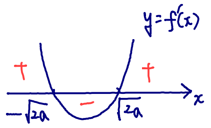
$a>0$ のとき

$f'(x)=3(x^2-2a)$

$=3(x+\sqrt{2a})(x-\sqrt{2a})$

$f'(x)=0$ として

$x=-\sqrt{2a},\ \sqrt{2a}$



x	…	$-\sqrt{2a}$	…	$\sqrt{2a}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値 $f(-\sqrt{2a})=(-\sqrt{2a})^3-6a(-\sqrt{2a})+16$

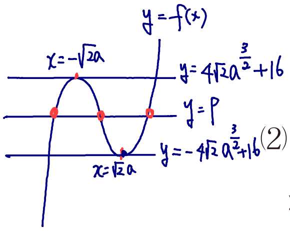
$=-2\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+6\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$

$=4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$

極小値 $f(\sqrt{2a})=-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$

$y=f(x)$ のグラフの概形は

⑤ のようになる



$a>0$ のとき
$\begin{cases} y=f(x) \\ y=p \end{cases}$
のグラフが3個の共有点をもつpの範囲は
$-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16<p<4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$
$\boxed{③}$ ウ　$\boxed{②}$ エ

(2)　$a>0$ とし，p を実数とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が3個の共有点をもつような p の値の範囲は $\boxed{③}$ $<p<$ $\boxed{②}$ である。

ウ（2点）　エ（2点）
$-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16<p<4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$

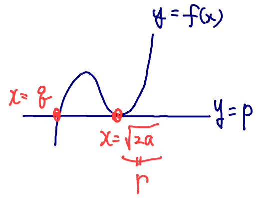
$p=$ $\boxed{}$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ は2個の共有点をもつ。それらの x 座標を q，r $(q<r)$ とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が点 $(r,\ p)$ で接することに注意すると

$-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$

$$q=\boxed{-2}\sqrt{\boxed{2}}\,a^{\frac{1}{2}},\quad r=\sqrt{\boxed{2}}\,a^{\frac{1}{2}}$$

オカ　キ（2点）　ク（2点）

と表せる。



$(f(x)$の極小値$)<p<(f(x)$の極大値$)$

$p=-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$ のとき
$\begin{cases} y=f(x) \\ y=p \end{cases}$
を連立して
$f(x)=p$
すなわち
$x^3-6ax+4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}=0$
$(x-\sqrt{2a})^2(x+2\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}})=0$
$\therefore\ x=-2\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}$

$x=\sqrt{2a}$ で接するので $x=\sqrt{2a}$ は重解

$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$

よって
$q=\boxed{-2\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}}$ オカキ
$r=\boxed{\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}}$ ク

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$2\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$	①　$-2\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$
エ ②　$4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$	ウ ③　$-4\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$
④　$8\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$	⑤　$-8\sqrt{2}\,a^{\frac{3}{2}}+16$

(3)　方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数を n とする。次の⓪～⑤のうち，正しいものは $\boxed{①}$ と $\boxed{④}$ である。

ケ（3点）　コ（3点）

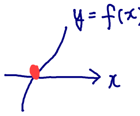
(3) $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0\ (x軸) \end{cases}$
のグラフの共有点の個数が n である

$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ の解答群（解答の順序は問わない。）

⓪　$n=1$ ならば $a<0$	①　$a<0$ ならば $n=1$
②　$n=2$ ならば $a<0$	③　$a<0$ ならば $n=2$
④　$n=3$ ならば $a>0$	⑤　$a>0$ ならば $n=3$

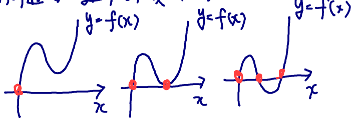
補 ④の逆⑤は成り立たない
$n=3$ となる必要十分条件は極小値が負より $a>2$

㋐ $a<0$ のとき
(1) より $n=1$



① は正しい
③ は正しくない

㋑ $a>0$ のとき
極小値が正，0，負の場合で



⑤は正しくない（反例は $a>0 \Rightarrow n=1,2$）

⓪，②は正しくない（反例は $n=1 \Rightarrow a>0$，$n=2 \Rightarrow a>0$）
$n=3$ ならば $a>0$ となる必要があるから ④は正しい
よって正しいものは $\boxed{①,\ ④}$ ケ，コ

補 $n=2$ のとき極小値が0なので
$f(\sqrt{2a})=-4\sqrt{2}(a^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2})=0$
すなわち $a=2$