数学Ⅱ・数学B

〔2〕 a, b は正の実数であり，$a \neq 1$，$b \neq 1$ を満たすとする。太郎さんは $\log_a b$ と $\log_b a$ の大小関係を調べることにした。

(配点14点)

(1) 太郎さんは次のような考察をした。

まず，$\log_3 9 = \boxed{2}$，$\log_9 3 = \dfrac{1}{\boxed{2}}$ である。この場合

ス(2点)　ス

$$\log_3 9 > \log_9 3$$

が成り立つ。

一方，$\log_{\frac{1}{4}} \boxed{8} = -\dfrac{3}{2}$，$\log_{\boxed{8}} \dfrac{1}{4} = -\dfrac{2}{3}$ である。この場合

セ(3点)　セ

$$\log_{\frac{1}{4}} \boxed{8} < \log_{\boxed{8}} \dfrac{1}{4}$$

セ　セ

が成り立つ。

(1) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = \boxed{2}$ ス

$\log_9 3 = \dfrac{1}{\log_3 9} = \dfrac{1}{2}$

$2 > \dfrac{1}{2}$ なので $\log_3 9 > \log_9 3$

$\log_{\frac{1}{4}} x = -\dfrac{3}{2}$ とすると

$x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(2^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{(-2)\cdot(-\frac{3}{2})}$

$= 2^3$

$= \boxed{8}$ セ

$\log_{\frac{1}{4}} 8 = -\dfrac{3}{2}$

$\log_8 \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 8} = -\dfrac{2}{3}$

$-\dfrac{3}{2} < -\dfrac{2}{3}$ なので $\log_{\frac{1}{4}} 8 < \log_8 \dfrac{1}{4}$

補 (1)では

$\log_a b > \log_b a$

$\log_a b < \log_b a$

の例を考えている

(2)　ここで

$\log_a b = t$ ……………………………… ①

とおく。

(1)の考察をもとにして，太郎さんは次の式が成り立つと推測し，それが正しいことを確かめることにした。

$\log_b a = \dfrac{1}{t}$ ……………………………… ②

$a^t = b$　　　　$a = b^{\frac{1}{t}}$

①により，$\boxed{\ ①\ }$ である。このことにより $\boxed{\ ①\ }$ が得られ，②が成り立つことが確かめられる。

ソ(2点)　　タ(1点)

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ $a^b = t$	① $a^t = b$	② $b^a = t$
③ $b^t = a$	④ $t^a = b$	⑤ $t^b = a$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ $a = t^{\frac{1}{b}}$	① $a = b^{\frac{1}{t}}$	② $b = t^{\frac{1}{a}}$
③ $b = a^{\frac{1}{t}}$	④ $t = b^{\frac{1}{a}}$	⑤ $t = a^{\frac{1}{b}}$

(2)　$\log_a b = t$ …①

とおくと

$b = a^t$　$\boxed{①}$ ソ

両辺を $\frac{1}{t}$ 乗して

$b^{\frac{1}{t}} = (a^t)^{\frac{1}{t}}$

よって　$a = b^{\frac{1}{t}}$　$\boxed{①}$ タ

補　$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

が成り立つので

$\log_a b = t$　とおくと　$\log_b a = \dfrac{1}{t}$

数学Ⅱ・数学B

(3)　次に，太郎さんは(2)の考察をもとにして

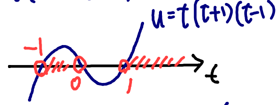
$$t > \frac{1}{t} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

を満たす実数 t ($t \neq 0$) の値の範囲を求めた。

太郎さんの考察

$t > 0$ ならば，③ の両辺に t を掛けることにより，$t^2 > 1$ を得る。
このような t ($t > 0$) の値の範囲は $1 < t$ である。
$t < 0$ ならば，③ の両辺に t を掛けることにより，$t^2 < 1$ を得る。← 負の数をかけると符号の向きが逆になる
このような t ($t < 0$) の値の範囲は $-1 < t < 0$ である。

㊓ ③の両辺に $t^2(>0)$ をかけて
$t^3 > t$
$t(t+1)(t-1) > 0$



$\therefore -1<t<0,\ 1<t$

この考察により，③ を満たす t ($t \neq 0$) の値の範囲は

$$-1 < t < 0,\quad 1 < t$$

であることがわかる。

ここで，a の値を一つ定めたとき，不等式

$$\log_a b > \log_b a \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

を満たす実数 b ($b > 0$，$b \neq 1$) の値の範囲について考える。

④ を満たす b の値の範囲は，$a > 1$ のときは $\boxed{\text{③}}$ であり，
チ(2点)

$0 < a < 1$ のときは $\boxed{\text{⓪}}$ である。
ツ(2点)

④で $\log_a b = t$ とおくと (2)より $\log_b a = \frac{1}{t}$ なので $t > \frac{1}{t}$
③となるので 上の考察から

$-1 < t < 0,\ 1 < t$

底がaの対数にして

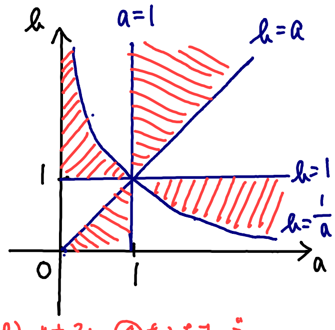
$\log_a \frac{1}{a} < \log_a b < \log_a 1,\ \log_a a < \log_a b$　　底aで場合分け

$a>1$ のとき $\boxed{\frac{1}{a} < b < 1,\ a < b}$ ③チ

$0<a<1$ のとき $\frac{1}{a} > b > 1,\ a > b\ (>0)$

すなわち $\boxed{0<b<a,\ 1<b<\frac{1}{a}}$ ⓪ツ

ab平面に図示すると左図斜線部(境界線含まず)



↑
この領域に点(a,b)があると④をみたすので
$\log_a b > \log_b a$

チ の解答群

⓪ $0 < b < \dfrac{1}{a}$, $1 < b < a$ 　　① $0 < b < \dfrac{1}{a}$, $a < b$

② $\dfrac{1}{a} < b < 1$, $1 < b < a$ 　　③ $\dfrac{1}{a} < b < 1$, $a < b$

ツ の解答群

⓪ $0 < b < a$, $1 < b < \dfrac{1}{a}$ 　　① $0 < b < a$, $\dfrac{1}{a} < b$

② $a < b < 1$, $1 < b < \dfrac{1}{a}$ 　　③ $a < b < 1$, $\dfrac{1}{a} < b$

(4) $p = \dfrac{12}{13}$, $q = \dfrac{12}{11}$, $r = \dfrac{14}{13}$ とする。

次の⓪～③のうち，正しいものは $\boxed{\text{②}}$ である。

テ(3点)

$(a, b) = (p, q), (p, r)$ が
(3)の④をみたすかどうかを考える

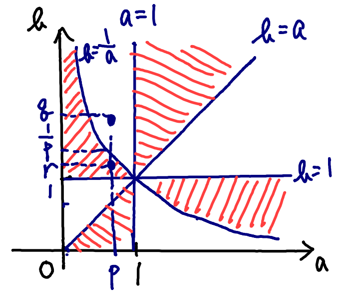
テ の解答群

⓪ $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$

① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$

② $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$

③ $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$



(4)は $a=p$ $(0<p<1)$ だけみる!

$0<p<1$

$\dfrac{1}{p} = \dfrac{13}{12} = \dfrac{143}{12\cdot 11}$

$q = \dfrac{12}{11} = \dfrac{144}{12\cdot 11}$

分母をそろえた

より

$\dfrac{1}{p} < q$

であるから

(p, q) は④をみたさない

ゆえに

$\log_p q < \log_q p$

$\dfrac{1}{p} = \dfrac{13}{12} = \dfrac{169}{12\cdot 13}$

$r = \dfrac{14}{13} = \dfrac{168}{12\cdot 13}$

分母をそろえた

より

$1 < r < \dfrac{1}{p}$

であるから

(p, q) は④をみたす

ゆえに

$\log_p r > \log_r p$

よって $\boxed{\text{②}}$ テ