数学Ⅱ・数学B　（注）この科目には，選択問題があります。（23ページ参照。）

第１問　（必答問題）（配点　30）

〔１〕　座標平面上に点 A(－８，０) をとる。また，不等式

(配点16点)

$$x^2+y^2-4x-10y+4\leqq 0$$

D: $(x-2)^2+(y-5)^2\leqq 25$

の表す領域を D とする。

Dは 中心が点(2, 5), 半径が5の円の周および内部

(1)　領域 D は，中心が点($\boxed{2}$ ， $\boxed{5}$)，半径が $\boxed{5}$ の円の

ア　イ (1点)　ウ (1点)

$\boxed{3}$ である。

周および内部　エ (2点)

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪　周	①　内　部	②　外　部
③　周および内部	④　周および外部	

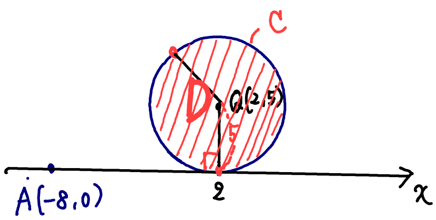
以下，点($\boxed{2}$ ， $\boxed{5}$) を Q とし，方程式

ア　イ

C: $x^2+y^2-4x-10y+4=0$　← Dの境界線(周)

の表す図形を C とする。

Cは 中心Q(2, 5), 半径が5の円周



(2)　点 A を通る直線と領域 D が共有点をもつのはどのようなときかを考えよう。

中心 Q(2, 5)，半径 5 から C は直線 $y = \boxed{0}$ (x軸) に接する

オ

(i)　(1) により，直線 $y = \boxed{0}$ は点 A を通る C の接線の一つとなることがわかる。

オ(2点)

太郎さんと花子さんは点 A を通る C のもう一つの接線について話している。

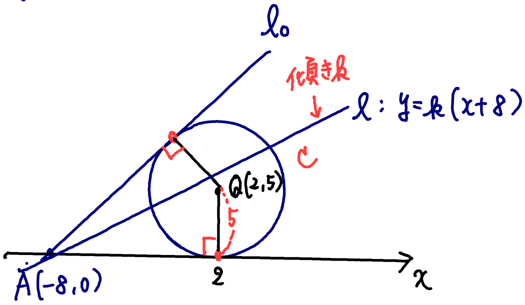
点 A を通り，傾きが k の直線を ℓ とする。

(−8, 0)

$\ell : y = k(x+8)$

> 太郎：直線 ℓ の方程式は $y = k(x+8)$ と表すことができるから，
> 　　　これを
> 　　　　$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$
> 　　　に代入することで接線を求められそうだね。
>
> 花子：x 軸と直線 AQ のなす角のタンジェントに着目することでも
> 　　　求められそうだよ。

点Aを通る直線 $y=0$ 以外の接線を ℓ_0 とする



(ii)　太郎さんの求め方について考えてみよう。

$y = k(x+8)$ を $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ に代入すると，x についての２次方程式

$x^2 + k^2(x+8)^2 - 4x - 10k(x+8) + 4 = 0$

$$(k^2+1)x^2 + (16k^2 - 10k - 4)x + 64k^2 - 80k + 4 = 0 \quad \cdots$$

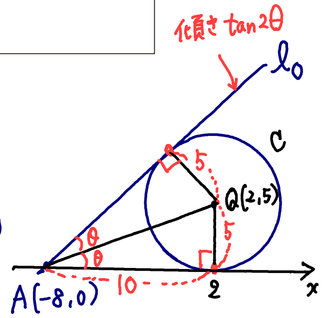
が得られる。この方程式が $\boxed{\ 0\ }$ ときの k の値が接線の傾きとなる。

カ (2点)

重解をもつ　↖ 重解が接点のx座標

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪	重解をもつ
①	異なる二つの実数解をもち，一つは 0 である
②	異なる二つの正の実数解をもつ
③	正の実数解と負の実数解をもつ
④	異なる二つの負の実数解をもつ
⑤	異なる二つの虚数解をもつ



(iii)　花子さんの求め方について考えてみよう。

x 軸と直線 AQ のなす角を θ $\left(0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\tan\theta = \frac{\boxed{\ 1\ }}{\boxed{\ 2\ }} \quad \begin{matrix}\text{キ} \\ \text{ク (1点)}\end{matrix}$$

tanθは直線AQの傾きより

$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ キ ク

であり，直線 $y = \boxed{\ 0\ }$ と異なる接線の傾きは $\tan\ \boxed{2\theta}$ と表すことができる。

オ　l_0　①ケ (2点)

l_0とx軸正方向のなす角は 2θ なので，

l_0の傾きは $\boxed{\tan 2\theta}$ ①ケ

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪	θ	①	2θ	②	$\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$
③	$\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$	④	$(\theta + \pi)$	⑤	$(\theta - \pi)$
⑥	$\left(2\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$	⑦	$\left(2\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$		

(iv) 点Aを通る C の接線のうち，直線 $y=$ $\boxed{0}$ と異なる接線の傾き
オ　ℓ_0
を k_0 とする。このとき，(ii) または (iii) の考え方を用いることにより

本番では (iii) だけ用いる
念のため (ii) の考え方も下でやっておきました.

$$k_0 = \frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$$

コ サ (2点)

であることがわかる。

直線 ℓ と領域 D が共有点をもつような k の値の範囲は $\boxed{5}$ である。
$0 \leqq k \leqq k_0$
シ (2点)

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ $k > k_0$	① $k \geqq k_0$
② $k < k_0$	③ $k \leqq k_0$
④ $0 < k < k_0$	⑤ $0 \leqq k \leqq k_0$

(ii)の考え方

(#)の判別式を D_1 として

$\frac{D_1}{4} = (8k^2-5k-2)^2-(k^2+1)(64k^2-80k+4)$

$= 64k^4+25k^2+4-80k^3+20k-32k^2$

$\quad -(64k^3-80k^3+68k^2-80k+4)$

$= -75k^2+100k$

$= -25k(3k-4)$

$\frac{D_1}{4}=0$ とすると

$k=0, \frac{4}{3}$

接線の傾き

$k_0 \neq 0$ なので $k_0 = \boxed{\frac{4}{3}}$ コ サ

(iii)の考え方

$k_0 = \tan 2\theta$　2倍角の公式

$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$= \frac{1}{\frac{3}{4}}$

$= \boxed{\frac{4}{3}}$ コ サ

補 k_0 の求め方は　← これが定番だと思う

円 C と直線 ℓ が接することから

円 C の中心 $Q(2,5)$ と $\ell: kx-y+8k=0$

の距離が円 C の半径5と等しいことから　←点と直線の距離

$\frac{|2k-5+8k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 5$　② $\times\sqrt{k^2+1}$

$5|2k-1| = 5\sqrt{k^2+1}$　② $\times\frac{1}{5}$

$|2k-1| = \sqrt{k^2+1}$

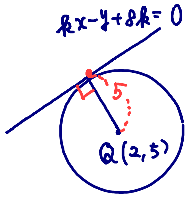
両辺非負で2乗して

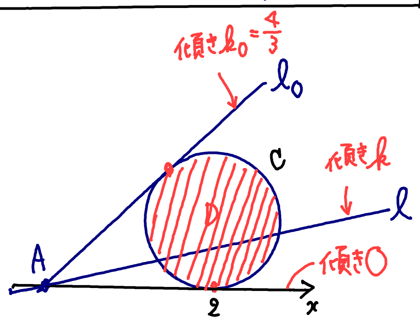
$4k^2-4k+1 = k^2+1$

$3k^2-4k=0$

$k(3k-4)=0$

$\therefore k=0, \frac{4}{3}$





ℓ と D が共有点をもつ k の値の範囲は

傾きに着目して

$\boxed{0 \leqq k \leqq k_0} = \frac{4}{3}$

⑤ シ

補 (ii)の考え方で

$D_1 \geqq 0$

として $-25k(3k-4) \geqq 0$

$\therefore 0 \leqq k \leqq \frac{4}{3}$