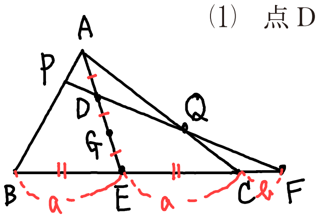
数学Ⅰ・数学A 第3問～第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第5問 （選択問題）（配点 20）

△ABC の重心を G とし，線分 AG 上で点 A とは異なる位置に点 D をとる。直線 AG と辺 BC の交点を E とする。また，直線 BC 上で辺 BC 上にはない位置に点 F をとる。直線 DF と辺 AB の交点を P，直線 DF と辺 AC の交点を Q とする。

点Eは線分BCの中点
AG : GE = 2 : 1



(1) 点 D は線分 AG の中点であるとする。このとき，△ABC の形状に関係なく

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}} = \frac{\boxed{1}\ ア}{\boxed{2}\ イ}$$ (2点)

AG : GE = 2 : 1
AD : DG = 1 : 1
より AD = DG = GE
よって $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}} = \boxed{\frac{1}{2}}$ ア イ

△ABE, 直線PFにメネラウスの定理を用いて
$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FE}} \cdot \frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DA}} \cdot \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} = 1$
より $\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}} = 1$
∴ $\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}} = \boxed{2 \times \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}}}$ ウ ①エ ③オ …①

である。また，点 F の位置に関係なく

BE = EC = a
CF = l
とおくと
BF = 2a + l
EF = a + l

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}} = \boxed{2}\ ウ \times \frac{\boxed{①}\ エ\ \mathrm{BF}}{\boxed{③}\ オ\ \mathrm{EF}}, \qquad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}} = \boxed{2}\ カ \times \frac{\boxed{②}\ キ\ \mathrm{CF}}{\boxed{③}\ ク\ \mathrm{EF}}$$ (2点) (2点)

△AEC, 直線DFにメネラウスの定理を用いて
$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}} = 1$
より $\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CF}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}} \cdot \frac{1}{2} = 1$
∴ $\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}} = \boxed{2 \times \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}}$ カ ②キ ③ク …②

であるので，つねに

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}} + \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}} = \boxed{4}\ ケ$$ (2点)

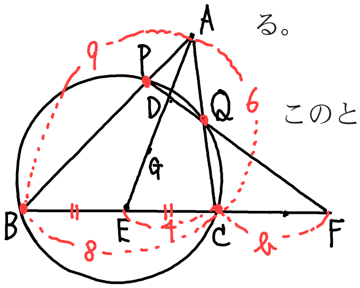
となる。

①+②より
$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}} + \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}$
$= 2 \cdot \frac{\mathrm{BF} + \mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}$
$= 2 \cdot \frac{(2a+l)+l}{a+l}$
$= 2 \cdot \frac{2(a+l)}{a+l}$
$= 2 \cdot 2$
$= \boxed{4}$ ケ

エ, オ, キ, ク の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ BC	① BF	② CF	③ EF
④ FP	⑤ FQ	⑥ PQ	

(2) AB = 9，BC = 8，AC = 6 とし，(1) と同様に，点 D は線分 AG の中点であるとする。ここで，4 点 B，C，Q，P が同一円周上にあるように点 F をとる。



このとき，AQ = $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$ AP であるから　コ サ(2点)

方べきの定理を用いて

$AP \cdot AB = AQ \cdot AC$

$9AP = 6AQ$

$\therefore AQ = \boxed{\dfrac{3}{2}} AP$　コ サ

AP = $\dfrac{\boxed{13}}{\boxed{6}}$，　AQ = $\dfrac{\boxed{13}}{\boxed{4}}$　シス セ(2点)　ソタ チ(2点)

$AP = 2p$ …(*) とおくと　← p を求める!

$AQ = 3p$

$BP = 9 - 2p$

$CQ = 6 - 3p = 3(2 - p)$

であり

(1)で求めた $\dfrac{BP}{AP} + \dfrac{CQ}{AQ} = 4$ へ代入して

$\dfrac{9-2p}{2p} + \dfrac{\cancel{3}(2-p)}{\cancel{3}p} = 4$

両辺に 2p をかけて

$9 - 2p + 2(2-p) = 8p$

$12p = 13$

$\therefore p = \dfrac{13}{12}$

よって(*)から

$AP = \boxed{\dfrac{13}{6}}$　シス セ

$AQ = \boxed{\dfrac{13}{4}}$　ソタ チ

CF = $\dfrac{\boxed{44}}{\boxed{15}}$ である。　ツテ トナ(3点)

$\left(BP = 9 - \dfrac{13}{6} = \dfrac{41}{6}\right)$

$CQ = 6 - \dfrac{13}{4} = \dfrac{11}{4}$

$AQ : CQ = \dfrac{13}{4} : \dfrac{11}{4} = 13 : 11$

CF = ℓ とすると BE = EC = 4 より EF = ℓ + 4

②の $\dfrac{CQ}{AQ} = 2 \times \dfrac{CF}{EF}$ へ代入して

$\dfrac{11}{13} = 2 \times \dfrac{\ell}{\ell + 4}$　2×13(ℓ+4)

$11(\ell + 4) = 26\ell$

$15\ell = 44$

$\therefore \ell = \boxed{\dfrac{44}{15}}$　ツテ トナ

(3) △ABC の形状や点 F の位置に関係なく，つねに $\dfrac{BP}{AP} + \dfrac{CQ}{AQ} = 10$ となるのは，$\dfrac{AD}{DG} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{3}}$ のときである。　ニ ヌ(3点)

(1)と同じことをする!

$\dfrac{AD}{DG} = k$ とおくと　← 求めたい値を k とおいた

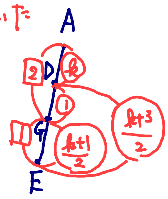
AD : DG = k : 1

AG : GE = 2 : 1

なので

$\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{k}{\frac{k+3}{2}} = \dfrac{2k}{k+3}$

(1)は k = 1 の場合で $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{2 \cdot 1}{1+3} = \dfrac{1}{2}$



(1)で□だけが変わる!

△ABE，直線 PF にメネラウスの定理を用いて

$\dfrac{BF}{FE} \cdot \boxed{\dfrac{ED}{DA}} \cdot \dfrac{AP}{PB} = 1$

より $\dfrac{BF}{EF} \cdot \boxed{\dfrac{k+3}{2k}} \cdot \dfrac{AP}{BP} = 1$

$\dfrac{BP}{AP} = \dfrac{k+3}{2k} \cdot \dfrac{BF}{EF}$ …①′

△AFC，直線 DF にメネラウスの定理を用いて

$\dfrac{EF}{FC} \cdot \dfrac{CQ}{QA} \cdot \boxed{\dfrac{AD}{DE}} = 1$

より $\dfrac{EF}{CF} \cdot \dfrac{CQ}{AQ} \cdot \boxed{\dfrac{2k}{k+3}} = 1$

$\dfrac{CQ}{AQ} = \dfrac{k+3}{2k} \cdot \dfrac{CF}{EF}$ …②′

①′+②′として　(1)と同様

$\dfrac{BP}{AP} + \dfrac{CQ}{AQ} = \dfrac{k+3}{2k} \cdot \underbrace{\dfrac{BF+CF}{EF}}_{2}$

$= \dfrac{k+3}{2k} \cdot 2$

$= \dfrac{k+3}{k}$

これが 10 になるので

$\dfrac{k+3}{k} = 10 \xrightarrow{\times 10} k + 3 = 10k$

$\therefore k = \dfrac{1}{3}$

よって $\dfrac{AD}{DG} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$　ニ ヌ