

(3) (2) の考察は、不定方程式

$$5^5 x - 2^5 y = 1 \quad \text{②}$$

いざれも 5^5 で割ったときの余りは 0
 2^5 で割ったときの余りは 1

の整数解を調べるために利用できる。

x, y を ② の整数解とする。 $5^5 x$ は 5^5 の倍数であり、 2^5 で割ったときの余りは 1 となる。よって、(2) により、 $5^5 x - 625^2$ は 5^5 でも 2^5 でも割り切れる。 5^5 と 2^5 は互いに素なので、 $5^5 x - 625^2$ は $5^5 \cdot 2^5$ の倍数である。

このことから、② の整数解のうち、 x が 3 桁の正の整数で最小になるのは

$$x = \boxed{125}, y = \boxed{12207}$$

サシス (3点) セマタツツ (3点)

であることがわかる。

から z を整数とて

$$5^5 x - 5^8 = 5^5 \cdot 2^5 z$$

と表せて、両辺を 5^5 でわって

$$x - 5^3 = 2^5 z$$

x が 3 桁の正の整数で最小になるのは $z=0$ のとき

$$x = \boxed{125} \text{ サシス}$$

$$11^2 = 121$$

$$(11^2)^2 = 121^2$$

$$11^4 = 14641$$

$$= 2^4 \cdot 915 + 1$$

(4) 11^4 を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい。不定方程式

$$11^5 x - 2^5 y = 1 \quad \text{④}$$

の整数解のうち、 x が正の整数で最小になるのは

$$x = \boxed{19}, y = \boxed{95624}$$

テト (3点) ト=マネノ (2点)

である。

④より $11^5 x$ は 2^5 で割ったときの余りは 1 ← (3) と同じことをする!

$11^5 x - 11^8$ は 2^5 の倍数かつ 11^5 の倍数である。
 2^5 と 11^5 は互いに素であることから $11^5 x - 11^8$ は $2^5 \cdot 11^5$ の倍数である。

w を整数とて

$$11^5 x - 11^8 = 2^5 \cdot 11^5 w$$

両辺を 11^5 でわって

$$x - 11^3 = 2^5 w$$

$$\therefore x = 32w + 11^3$$

$$= 32w + 1331$$

$$= 32w + 32 \cdot 41 + 19$$

$$= 32(w+41) + 19$$

x が正の整数で最小になるのは $w+41=0$ のとき

$$x = \boxed{19}$$

テト

②から

$$2^5 y = 5^5 x - 1 = 5^5 \cdot 125 - 1$$

$$= 5^5 \cdot 5^3 - 1$$

$$= 5^8 - 1$$

$$= (5^4 - 1)(5^4 + 1)$$

$$= (5^2 - 1)(5^2 + 1)(5^4 + 1)$$

$$= 24 \cdot 26 \cdot 626$$

$$= 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 313$$

$$= 2^5 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 313$$

$$= 2^5 \cdot 12207$$

よって $y = \boxed{12207}$ セマタツツ

④から $2^5 y = 11^5 \cdot 19 - 1$

$$y = \frac{161051 \cdot 19 - 1}{32}$$

$$= \frac{3059968}{32}$$

$$= \boxed{95624} \text{ ト=マネノ}$$

↑
2点しかないので鬼計算

← これはキツイ
右辺は 2^5 でわけるけど...

$$11^2 = 121$$

$$11^3 = 1331$$

$$11^5 = 11^3 \cdot 11^2$$

$$= 1331 \cdot 121$$

$$= 161051$$

$$\frac{161051}{x} \quad 19$$

$$1999459$$

$$161051$$

$$3059969$$

$$32 \overline{) 1331}$$

$$\underline{128}$$

$$51$$

$$\underline{32}$$

$$19$$