第３問　（選択問題）（配点　20）

複数人がそれぞれプレゼントを一つずつ持ち寄り，交換会を開く。ただし，プレゼントはすべて異なるとする。プレゼントの交換は次の**手順**で行う。

手順

外見が同じ袋を人数分用意し，各袋にプレゼントを一つずつ入れたうえで，各参加者に袋を一つずつでたらめに配る。各参加者は配られた袋の中のプレゼントを受け取る。

交換の結果，１人でも自分の持参したプレゼントを受け取った場合は，交換をやり直す。そして，全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったところで交換会を終了する。

n人のプレゼント交換をするとき n人のプレゼントを順に①②,…ⓝとし これを一列に並べ,左から順に受け取るとする。受け取り方は $n!$通り そのうち 左からk番目が ⓚ以外となる受け取り方をa_n通りとする。

(1)　２人または３人で交換会を開く場合を考える。

(i)　２人で交換会を開く場合，１回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は $\boxed{\text{ア}}$ 1 通りある。したがって，１回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}\ 1}{\boxed{\text{ウ}}\ 2}$ である。

ア(1点)　ウ(1点)

(ii)　３人で交換会を開く場合，１回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は $\boxed{\text{エ}}$ 2 通りある。したがって，１回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}\ 1}{\boxed{\text{カ}}\ 3}$ である。

エ(2点)　カ(1点)

(iii)　３人で交換会を開く場合，４回以下の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}\ 65}{\boxed{\text{ケコ}}\ 81}$ である。

ケコ(2点)

(i) a_2は
②①
のみで
$a_2=\boxed{1}$ ア
$P_2=\dfrac{a_2}{2!}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$ イ ウ

(ii) a_3は
②③①
③②①
で
$a_2=\boxed{2}$ エ
$P_3=\dfrac{a_2}{3!}=\dfrac{2}{6}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$ オ カ

n人でのプレゼント交換で１回目の交換で交換会が終了する確率をP_nとすると
$P_n=\dfrac{a_n}{n!}$

(iii) ３人で交換会を開く場合，１回で交換会が終了しない確率は
$1-P_3=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
４回以下の交換で交換会が終了しない確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$
余事象の確率
よって ４回以下の交換で交換会が終了する確率は
$1-\dfrac{16}{81}=\boxed{\dfrac{65}{81}}$ キク ケコ

(2)　4人で交換会を開く場合，1回目の交換で交換会が終了する確率を次の**構想**に基づいて求めてみよう。

> **構想**
>
> 1回目の交換で交換会が**終了しない**プレゼントの受け取り方の総数を求める。そのために，自分の持参したプレゼントを受け取る人数によって場合分けをする。

自分の持参したプレゼントを受け取る人数がm人となる場合の数を b_m とする
①,②,③,④を一列に並べ，左からk番目がⓚとなるkがちょうどm個となる並べ方に等しい

$\boxed{b_1}$
4人のうち，自分のプレゼントを受け取る1人を1人決めて
それ以外の3人は自分以外のプレゼント
よって
$b_1 = {}_4C_1 \times a_3 = 4\times 2 = \boxed{8}$ サ
同様にして
$b_2 = {}_4C_2 \times a_2 = 6\times 1 = \boxed{6}$ シ
$b_3 = 0$
$b_4 = 1$ ←①②③④の1つ
よって4人のプレゼント交換で1回目で終了しないの受け取り方は
$b_1+b_2+b_3+b_4 = 8+6+0+1 = \boxed{15}$ 通り

1回目の交換で，4人のうち，ちょうど1人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は $\boxed{8}$ 通りあり，ちょうど2人が自分のプレゼントを受け取る場合は $\boxed{6}$ 通りある。このように考えていくと，1回目のプレゼントの受け取り方のうち，1回目の交換で交換会が終了しない受け取り方の総数は $\boxed{15}$ である。

サ (2点)　シ (2点)　スセ (1点)

したがって，1回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{8}}$ である。　ソ タ

a_4は次になる
9通り
②①④③
②③④①
②④①③
③①④②
③④①②
③④②①
④①②③
④③①②
④③②①

p_4 の余事象の確率は $\frac{15}{4!} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$
よって $p_4 = 1 - \frac{5}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$

$a_4 = 4! - 15 = 24 - 15 = 9$

(3)　5人で交換会を開く場合，1回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{30}}$ である。　チツ テト (3点)

(2)と同様に考えて
$b_1 = {}_5C_1 \times a_4 = 5\times 9 = 45$
$b_2 = {}_5C_2 \times a_3 = 10\times 2 = 20$
$b_3 = {}_5C_3 \times a_2 = 10\times 1 = 10$
$b_4 = 0$
$b_5 = 1$

$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 = 45+20+10+0+1 = 76$
p_5 の余事象の確率は $\frac{76}{5!} = \frac{76}{120} = \frac{19}{30}$
よって $p_5 = 1 - \frac{11}{30} = \boxed{\frac{19}{30}}$ チツ テト

(4)　A，B，C，D，Eの5人が交換会を開く。1回目の交換でA，B，C，Dがそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったとき，その回で交換会が終了する条件付き確率は $\dfrac{\boxed{44}}{\boxed{53}}$ である。　ナニ ヌネ (3点)

補 攪乱順列（かくらん）
完全順列
モンモール数
の問題が背景で
$a_{n+2} = (n+1)(a_{n+1} + a_n)$
もよく知られている

(4)
1回目の交換でA,B,C,Dが自分以外の持参したプレゼントを受け取ったとき
㋐ Eも自分以外のプレゼントを受け取る受け取り方は
$a_5 = 5! - 76 = 120 - 76 = 44$
㋑ Eは自分のプレゼントを受け取る受け取り方は
$a_4 = 9$

よって求める条件付き確率は $\frac{㋐}{㋐+㋑}$ より
$\frac{44}{44+9} = \boxed{\frac{44}{53}}$ ナニ ヌネ