数学Ⅰ・数学A

第2問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 p, q を実数とする。

（配点15点）

花子さんと太郎さんは，次の二つの2次方程式について考えている。

$$x^2 + px + q = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$x^2 + qx + p = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

①または②を満たす実数 x の個数を n とおく。

xの4次方程式㊅の実数解の個数がn

$(x^2+px+q)(x^2+qx+p)=0$ …㊅

(1) $p = 4$，$q = -4$ のとき，$n = \boxed{3}$ である。 ア（2点）

また，$p = 1$，$q = -2$ のとき，$n = \boxed{2}$ である。 イ（2点）

(2) $p = -6$ のとき，$n = 3$ になる場合を考える。

> 花子：例えば，①と②をともに満たす実数 x があるときは $n = 3$ になりそうだね。
>
> 太郎：それを α としたら，$\alpha^2 - 6\alpha + q = 0$ と $\alpha^2 + q\alpha - 6 = 0$ が成り立つよ。
>
> 花子：なるほど。それならば，α^2 を消去すれば，α の値が求められそうだね。
>
> 太郎：確かに α の値が求まるけど，実際に $n = 3$ となっているかどうかの確認が必要だね。
>
> 花子：これ以外にも $n = 3$ となる場合がありそうだね。

①または②が重解をもつとき

$n = 3$ となる q の値は

$q = \boxed{5}$，$\boxed{9}$

ウ（3点）　エ（2点）

である。ただし，$\boxed{\text{ウ}} < \boxed{\text{エ}}$ とする。

別 $\boxed{p=4, q=-4}$

㊅は $(x^2+4x-4)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-2\pm2\sqrt{2},\ 2$

$n=\boxed{3}$ ア

$\boxed{p=1, q=-2}$

㊅は $(x-1)^3(x+2)=0$

$\therefore x=-2, 1$

$n=\boxed{2}$ イ

(1) $\boxed{p=4, q=-4}$

①は $x^2+4x-4=0$ $\therefore x=-2\pm2\sqrt{2}$

②は $x^2-4x+4=0$ $(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

①または② $x=-2\pm2\sqrt{2},\ 2$

$\therefore n=\boxed{3}$ ア

$\boxed{p=1, q=-2}$

①は $x^2+x-2=0$ $(x-1)(x+2)=0$ $\therefore x=-2, 1$

②は $x^2-2x+1=0$ $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

①または② $x=-2, 1$

$\therefore n=\boxed{2}$ イ

①と②が共通解αをもつとき

$\alpha^2-6\alpha+q=0$ …ⓐ

$-)\ \alpha^2+q\alpha-6=0$

$-(q+6)\alpha+q+6=0$

$(q+6)(-\alpha+1)=0$

$q=-6$ または $\alpha=1$

(あ) $q=-6$ とすると ($p=q$) ①,②はともに

$x^2-6x+6=0$

$\therefore x=3\pm\sqrt{3}$

$n=2$ より不適

(い) $\alpha=1$ のとき

ⓐより $1-6+q=0$

$\therefore q=5$

このとき ①は $x^2-6x+5=0$ $(x-1)(x-5)=0$ $\therefore x=1, 5$

②は $x^2+5x-6=0$ $(x-1)(x+6)=0$ $\therefore x=-6, 1$

①または② $x=-6, 1, 5$

$n=3$ で適する

(う) ①または②が重解をもつとき

$p=-6$ として①,②の判別式をそれぞれD_1, D_2とすると

$D_1=4(9-q)$

$D_2=q^2+24>0$

$D_2>0$ より②は異なる2つの実数解をもつ

①が重解をもつとき $D_1=0$ より

$q=9$

このとき

①は $x^2-6x+9=0$ $(x-3)^2=0$ $\therefore x=3$

②は $x^2+9x-6=0$

$x=\dfrac{-9\pm\sqrt{105}}{2}$

$x\neq3$ とわかればok

①または② $x=\dfrac{-9\pm\sqrt{105}}{2},\ 3$

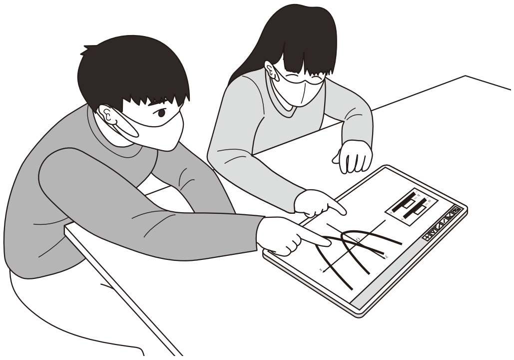
$n=3$ で適する

$n=3$ となる q は

(あ)(い),(う)より　$q=\boxed{5, 9}$

ウ エ

(3) 花子さんと太郎さんは，グラフ表示ソフトを用いて，①，② の左辺を y とおいた2次関数 $y = x^2 + px + q$ と $y = x^2 + qx + p$ のグラフの動きを考えている。



コックリさんやってる？

$p=-6$ に固定したまま，q の値だけを変化させる。

$$y=x^2-6x+q \qquad \cdots\cdots ③$$
$$y=x^2+qx-6 \qquad \cdots\cdots ④$$

の二つのグラフについて，$q=1$ のときのグラフを点線で，q の値を 1 から増加させたときのグラフを実線でそれぞれ表す。このとき，③ のグラフの移動の様子を示すと $\boxed{\text{⑥}}$ となり，④ のグラフの移動の様子を示すと $\boxed{\text{①}}$ となる。

オ(1点)

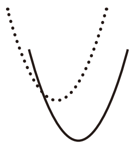
カ(2点)

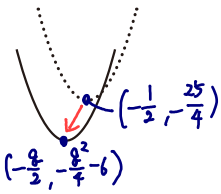
頂点の移動をみる!

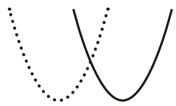
$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪〜⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。なお，x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である。

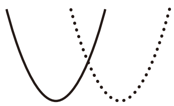
①は
$y=(x-3)^2+q-9$
頂点 $(3, \boxed{q-9})$
大きくなる
qの値を1から増加させると
頂点がy軸正方向(上)へ移動する
よって $\boxed{6}$ オ

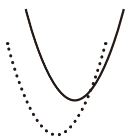
②は
$y=\left(x+\frac{q}{2}\right)^2-\frac{q^2}{4}-6$
頂点 $\left(\boxed{-\frac{q}{2}}, \boxed{-\frac{q^2}{4}-6}\right)$
小さくなる
qの値を1から増加させると
頂点がx軸負方向(左)
y軸負方向(下)
つまり
頂点が左下へ移動する
よって $\boxed{1}$ カ

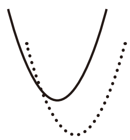
⓪


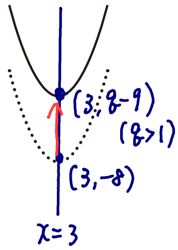
① カ


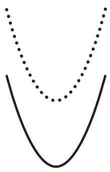
②


③


④


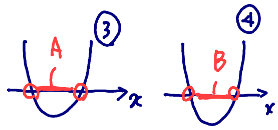
⑤


⑥ オ


⑦


(4) $\boxed{5}$ < q < $\boxed{9}$ とする。全体集合 U を実数全体の集合とし，
ウ　エ

U の部分集合 A，B を



③＝④ として

$x^2-6x+q=x^2+qx-6$

$(q+6)(x-1)=0$

$5<q<6$ では $q+6\neq0$

であるから $x=1$

ゆえに $5<q<9$ において

③,④ のグラフは $x=1$ で共有点をもつ

← 気付きたい！

$$A=\{x \mid x^2-6x+q<0\}$$ ← ③ のグラフの $y<0$ となる x

$$B=\{x \mid x^2+qx-6<0\}$$ ← ④ のグラフの $y<0$ となる x

とする。U の部分集合 X に対し，X の補集合を $\overline{X}$ と表す。このとき，次のことが成り立つ。

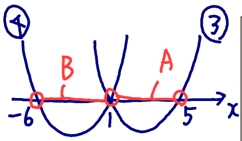
- $x \in A$ は，$x \in B$ であるための $\boxed{3}$。
　キ
- $x \in B$ は，$x \in \overline{A}$ であるための $\boxed{1}$。
　ク

（キ,ク両方正解で 3点）

$q=5$ のとき

③ は $y=x^2-6x+5$
$=(x-1)(x-5)$

④ は $y=x^2+5x-6$
$=(x-1)(x+6)$



$\boxed{キ}$，$\boxed{ク}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

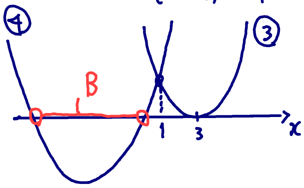
⓪	必要条件であるが，十分条件ではない
①	十分条件であるが，必要条件ではない
②	必要十分条件である
③	必要条件でも十分条件でもない

(3) のグラフの移動を考える！

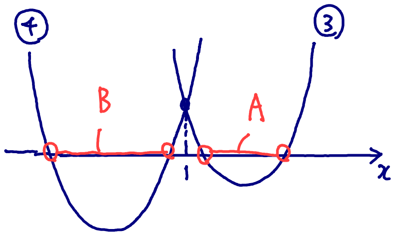
$q=9$ のとき

③ は $y=x^2-6x+9$
$=(x-3)^2$

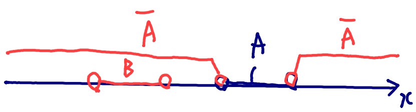
④ は $y=x^2-9x-6$
$=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{105}{4}$



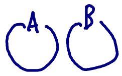
$5<q<9$ のとき



$x=1$ で共有点をもつ



$A\cap B\neq\emptyset$ より



$x\in A$ は $x\in B$ であるための

必要条件でも十分条件でもない $\boxed{3}$ キ

$B\subset\overline{A}$ かつ $B\neq\overline{A}$ より

$x\in B$ は $x\in\overline{A}$ であるための

十分条件であるが，必要条件ではない $\boxed{1}$ ク