数学Ⅰ・数学A　（注）この科目には，選択問題があります。（35ページ参照。）

第1問　（必答問題）（配点　30）

〔1〕　実数 a，b，c が

(配点 10点)

$$a+b+c=1 \quad \cdots\cdots ①$$

および

$$a^2+b^2+c^2=13 \quad \cdots\cdots ②$$

を満たしているとする。

(1)　$(a+b+c)^2$ を展開した式において，① と ② を用いると

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

①, ② を代入して

$1 = 13 + 2(ab+bc+ca)$

よって

$ab+bc+ca = \boxed{-6}$ アイ …③

$$ab+bc+ca=\boxed{-6}$$

アイ (2点)

であることがわかる。よって

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=\boxed{38}$$

ウエ (2点)

である。

$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

$(b-c)^2 = b^2+c^2-2bc$

$+)\ (c-a)^2 = c^2+a^2-2ca$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$= 2\cdot 13 - 2\cdot(-6)$ (∵②,③)

$= 26+12$

$= \boxed{38}$ ウエ …④

(2)　$a-b=2\sqrt{5}$ の場合に，$(a-b)(b-c)(c-a)$ の値を求めてみよう。

$$\begin{cases} a-b=2\sqrt{5} & \cdots ⑤ \\ b-c=x & \cdots ⑥ \\ c-a=y & \cdots ⑦ \end{cases}$$

$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと

⑥+⑦ として

$$x+y=\boxed{-2}\sqrt{5}$$

オカ（2点）

$$x+y=b-a$$
$$=-(a-b)$$
$$=\boxed{-2\sqrt{5}} \quad (\because ⑤) \quad \cdots ⑧$$

オカ

である。また，(1)の計算から

$$x^2+y^2=\boxed{18}$$

キク（2点）

⑤,⑥,⑦を④へ代入して

$$\underbrace{(2\sqrt{5})^2}_{20}+x^2+y^2=38$$

よって　$x^2+y^2=\boxed{18}$

キク

が成り立つ。

これらより

変形して　$(x+y)^2-2xy=18$

⑧を代入して

$$\underbrace{(-2\sqrt{5})^2}_{20}-2\boxed{xy}=18$$

$$\therefore \boxed{xy}=1$$

$$(a-b)(b-c)(c-a)=\boxed{2}\sqrt{5}$$

ケ（2点）

である。

⑤×⑥×⑦として

$$(a-b)(b-c)(c-a)=2\sqrt{5}\boxed{xy}$$
$$=\boxed{2\sqrt{5}}$$

ケ

補　$\begin{cases} x+y=-2\sqrt{5} \\ xy=1 \end{cases}$　← x,y を求めることもできる

より x,y が解となる2次方程式の1つは

$$t^2+2\sqrt{5}t+1=0$$

$$\therefore\ t=\underbrace{-\sqrt{5}\pm2}_{x,\ y}$$

⑥,⑦から　$\begin{cases} b-c=-\sqrt{5}+2 \\ c-a=-\sqrt{5}-2 \end{cases}$　または　$\begin{cases} b-c=-\sqrt{5}-2 \\ c-a=-\sqrt{5}+2 \end{cases}$