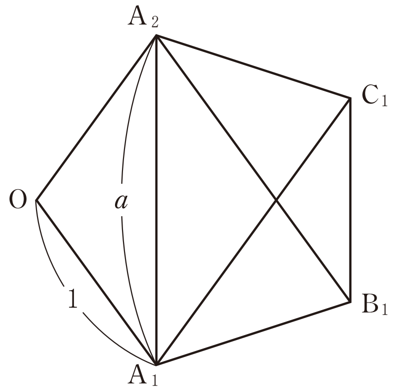
第5問 （選択問題）（配点 20）

1辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを a とする。

(1) 1辺の長さが1の正五角形 $OA_1B_1C_1A_2$ を考える。



$\angle A_1C_1B_1 = \boxed{\text{アイ}}^\circ$，$\angle C_1A_1A_2 = \boxed{\text{アイ}}^\circ$ となることから，$\overrightarrow{A_1A_2}$ と $\overrightarrow{B_1C_1}$ は平行である。ゆえに

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{B_1C_1}$$

であるから

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right)$$

また，$\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ は平行で，さらに，$\overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{A_1C_1}$ も平行であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1C_1} &= \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}\\ &= -\boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{OA_2}\\ &= \left(\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\right)\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right)\end{aligned}$$

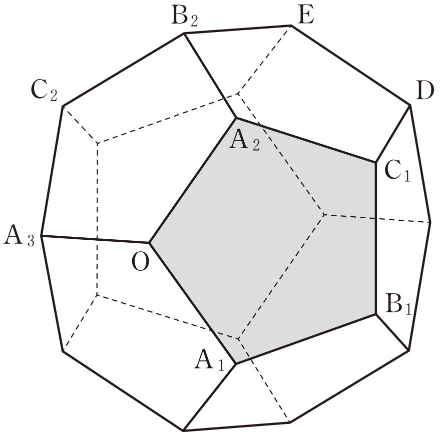
となる。したがって

$$\frac{1}{\boxed{\text{ウ}}} = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}$$

が成り立つ。$a > 0$ に注意してこれを解くと，$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

⑵　下の図のような，1辺の長さが1の正十二面体を考える。正十二面体とは，どの面もすべて合同な正五角形であり，どの頂点にも三つの面が集まっているへこみのない多面体のことである。



面 $OA_1B_1C_1A_2$ に着目する。$\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ が平行であることから

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_1} = \overrightarrow{OA_2} + \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{OA_1}$$

である。また

$$\left|\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2 = \frac{\boxed{\text{カ}} + \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

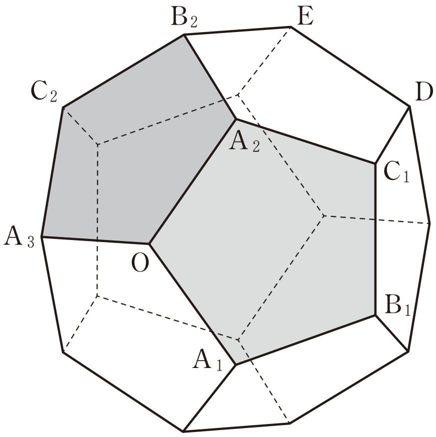
に注意すると

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = \frac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

を得る。

ただし，$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ は，文字 a を用いない形で答えること。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）



次に，面 $\mathrm{OA_2B_2C_2A_3}$ に着目すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$

である。さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = \frac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

が成り立つことがわかる。ゆえに

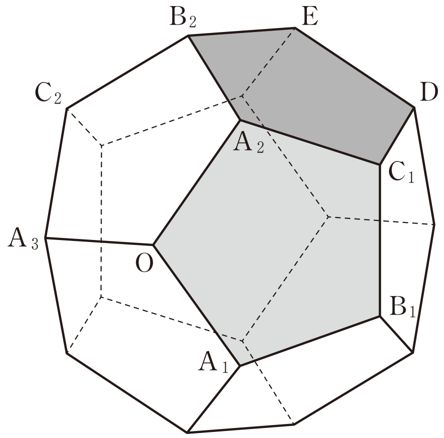
$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB_2}} = \boxed{\text{シ}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB_2}} = \boxed{\text{ス}}$$

である。

$\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① 1	② -1	③ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
④ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$	⑤ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$	⑥ $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$	⑦ $-\dfrac{1}{2}$
⑧ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$	⑨ $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$		

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)



最後に，面 $A_2C_1DEB_2$ に着目する。

$$\overrightarrow{B_2D} = \boxed{\text{ウ}}\ \overrightarrow{A_2C_1} = \overrightarrow{OB_1}$$

であることに注意すると，４点 O，B_1，D，B_2 は同一平面上にあり，四角形 OB_1DB_2 は $\boxed{\textbf{セ}}$ ことがわかる。

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ 正方形である
① 正方形ではないが，長方形である
② 正方形ではないが，ひし形である
③ 長方形でもひし形でもないが，平行四辺形である
④ 平行四辺形ではないが，台形である
⑤ 台形でない

ただし，少なくとも一組の対辺が平行な四角形を台形という。