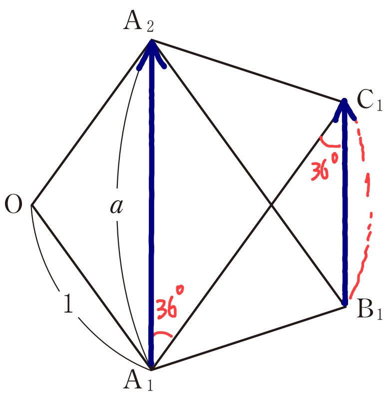
第5問 （選択問題）（配点　20）

1辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを a とする。

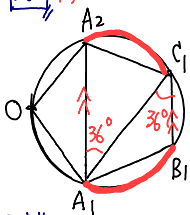
(1)　1辺の長さが1の正五角形 $OA_1B_1C_1A_2$ を考える。



正五角形OA₁B₁C₁Aの外接円を5等分した円周角の1つより

$\angle A_1C_1B_1 = \frac{180°}{5} = \boxed{36°}$ アイ

$\angle C_1A_1A_2 = 36°$



錯角が等しいので $\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{B_1C_1}$

ゆえに $B_1C_1 = 1$, $A_1A_2 = a$ より

$\overrightarrow{A_1A_2} = \boxed{a}\ \overrightarrow{B_1C_1}$ ウ

$\therefore \overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{a}\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{a}(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})$ …①

$\angle A_1C_1B_1 = \boxed{36}$°，$\angle C_1A_1A_2 = \boxed{36}$°となることから，$\overrightarrow{A_1A_2}$ と $\overrightarrow{B_1C_1}$ は平行である。ゆえに

アイ（2点）　アイ

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \boxed{a}\ \overrightarrow{B_1C_1}$$

ウ（2点）

であるから

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{\boxed{a}}\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{\boxed{a}}\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right)$$

ウ　ウ

$\overrightarrow{B_1A_2} = a\overrightarrow{A_1O}$
$= -a\overrightarrow{OA_1}$
$\overrightarrow{A_1C_1} = a\overrightarrow{OA_2}$

$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$
$= -a\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + a\overrightarrow{OA_2}$
$= (a-1)\overrightarrow{OA_2} - (a-1)\overrightarrow{OA_1}$
$= \boxed{(a-1)}(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})$ …②
エオ

また，$\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ は平行で，さらに，$\overrightarrow{OA_2}$ と $\overrightarrow{A_1C_1}$ も平行であることから

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$$
$$= -\boxed{a}\ \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + \boxed{a}\ \overrightarrow{OA_2}$$
ウ　ウ
$$= \left(\boxed{a} - \boxed{1}\right)\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right)$$

エ　オ（3点）

①=②として

$\frac{1}{a} = a - 1$　2×a

$1 = a^2 - a$

$a^2 - a - 1 = 0$ …③

$\therefore a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

となる。したがって

$$\frac{1}{\boxed{a}} = \boxed{a} - \boxed{1}$$

ウ　エ　オ

$a > 0$ なので

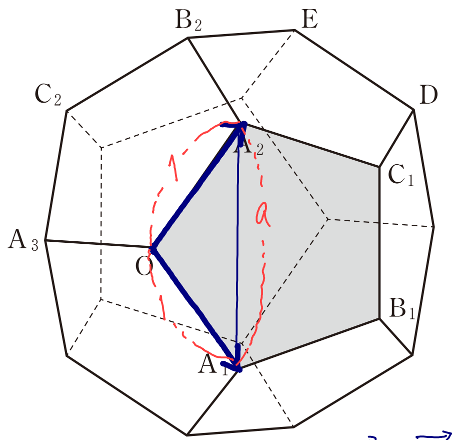
$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

黄金比

が成り立つ。$a > 0$ に注意してこれを解くと，$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

他の求め方もある

⑵　下の図のような，１辺の長さが１の正十二面体を考える。正十二面体とは，どの面もすべて合同な正五角形であり，どの頂点にも三つの面が集まっているへこみのない多面体のことである。



正五角形

$\overrightarrow{A_2B_1}=a\overrightarrow{OA_1}$

面 $OA_1B_1C_1A_2$ に着目する。$\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ が平行であることから

$$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_1}=\overrightarrow{OA_2}+\boxed{a}\,\overrightarrow{OA_1}$$

ウ

である。また

$$\left|\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2=\frac{\boxed{3}+\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

カ　キ　ク（2点）

に注意すると

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\frac{\boxed{1}-\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{4}}$$

ケ　コ　サ（3点）

を得る。

ただし，$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ は，文字 a を用いない形で答えること。

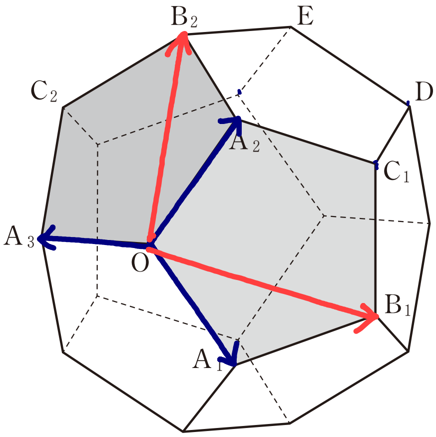
$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_1}$
$=\overrightarrow{OA_2}+a\overrightarrow{OA_1}$

$\left|\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2=a^2$
$=a+1$ （∵③より $a^2=a+1$）
$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1$
$=\boxed{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ カキク

展開して
$\left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}+\left|\overrightarrow{OA_1}\right|^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$\left|\overrightarrow{OA_1}\right|=\left|\overrightarrow{OA_2}\right|=1$ であるから
$1-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}+1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
よって　$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\boxed{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}$
ケコサ

補　$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\frac{1+1-a^2}{2}=\frac{2-a^2}{2}$

補
$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\left|\overrightarrow{OA_1}\right|\left|\overrightarrow{OA_2}\right|\cos 108^\circ$
なので
$\cos 108^\circ=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$
もわかる



$|\overrightarrow{OA_1}| = |\overrightarrow{OA_2}| = |\overrightarrow{OA_3}| = 1$, $|\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OB_2}| = a$

$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3B_2} = \overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_2}$

$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

正五角形

次に，面 $OA_2B_2C_2A_3$ に着目すると

$$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_3} + \boxed{ウ}\,\overrightarrow{OA_2}$$

$\boxed{a}$ ウ

である。さらに

$$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_1} = \frac{\boxed{ケ} - \sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$$

ケ $\boxed{1}$　コ $\boxed{5}$　サ $\boxed{4}$

が成り立つことがわかる。ゆえに

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2} = \boxed{シ},\quad \overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2} = \boxed{ス}$$

$\boxed{9}$ シ（3点）　$\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$　　$\boxed{0}$ ス（3点）

である。

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_1}\cdot(\overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_2})$

$= \overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$

$= \frac{1-\sqrt{5}}{4} + a\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$= (1+a)\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{-2-2\sqrt{5}}{8}$

$= \boxed{\frac{-1-\sqrt{5}}{4}}$ シ

$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2} = (\overrightarrow{OA_2} + a\overrightarrow{OA_1})\cdot(\overrightarrow{OA_3} + a\overrightarrow{OA_2})$

$= \overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3} + a|\overrightarrow{OA_2}|^2 + a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3} + a^2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$

$= \frac{1-\sqrt{5}}{4} + a + a\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4} + a^2\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

③から $a^2 = a+1$

$\boxed{a^2+a+1} = a+1+a+1 = 2(a+1) = 2\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$= 3+\sqrt{5}$

$= (\boxed{a^2+a+1})\frac{1-\sqrt{5}}{4} + a$

$= \frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{-2-2\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

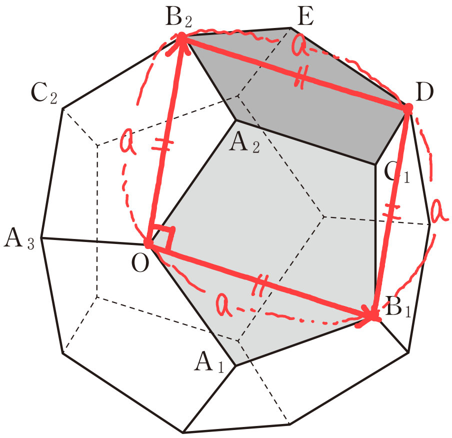
$= \frac{-1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$= \boxed{0}$ ⓪ ス

$\boxed{シ}$，$\boxed{ス}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① 1	② -1	③ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	⑤ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	⑥ $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	⑦ $-\frac{1}{2}$
⑧ $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	⑨ $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$		

ス　シ



$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}$ であるから $\overrightarrow{OB_1}\perp\overrightarrow{OB_2}$

正十二面体の面の対角線の長さはすべてaなので

$OB_1=OB_2=B_1D=B_2D=a$

$\overrightarrow{B_2D}=a\overrightarrow{A_2C_1}=\overrightarrow{OB_1}$

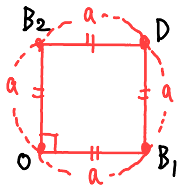
より 4点 O, B_1, D, B_2 は同一平面上にあり

$\overrightarrow{B_2D}\parallel\overrightarrow{OB_1}$ かつ $B_2D=OB_1$

よって $\angle B_1OB_2=90°$ も言えるので

四角形 OB_1DB_2 は 正方形 である

⓪ セ



正五角形

最後に，面 $A_2C_1DEB_2$ に着目する。

$$\overrightarrow{B_2D}=\boxed{a}\ \overrightarrow{A_2C_1}=\overrightarrow{OB_1}$$

ウ

であることに注意すると，４点 O，B_1，D，B_2 は同一平面上にあり，四角形 OB_1DB_2 は $\boxed{⓪}$ ことがわかる。

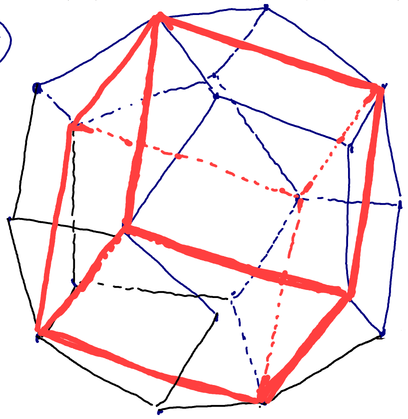
正方形である　セ（2点）

$\boxed{セ}$ の解答群

⓪	正方形である
①	正方形ではないが，長方形である
②	正方形ではないが，ひし形である
③	長方形でもひし形でもないが，平行四辺形である
④	平行四辺形ではないが，台形である
⑤	台形でない

ただし，少なくとも一組の対辺が平行な四角形を台形という。

補



正十二面体の4頂点を結ぶと正方形ができることがわかったが，同様に他の4頂点を結んでも正方形ができる

このことから正十二面体の8個の頂点で立方体もできる