第4問 （選択問題）（配点　20）

初項3，公差 p の等差数列を $\{a_n\}$ とし，初項3，公比 r の等比数列を $\{b_n\}$ とする。ただし，$p \neq 0$ かつ $r \neq 0$ とする。さらに，これらの数列が次を満たすとする。

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1}b_n + 3b_{n+1} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots\cdots ①$$

(1)　p と r の値を求めよう。自然数 n について，a_n，a_{n+1}，b_n はそれぞれ

$$a_n = \boxed{\text{ア}} + (n-1)p \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$a_{n+1} = \boxed{\text{ア}} + np \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$b_n = \boxed{\text{イ}}\, r^{n-1}$$

と表される。$r \neq 0$ により，すべての自然数 n について，$b_n \neq 0$ となる。

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = r$ であることから，① の両辺を b_n で割ることにより

$$\boxed{\text{ウ}}\, a_{n+1} = r\left(a_n + \boxed{\text{エ}}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立つことがわかる。④ に ② と ③ を代入すると

$$\left(r - \boxed{\text{オ}}\right)pn = r\left(p - \boxed{\text{カ}}\right) + \boxed{\text{キ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

となる。⑤ がすべての n で成り立つことおよび $p \neq 0$ により，$r = \boxed{\text{オ}}$ を得る。さらに，このことから，$p = \boxed{\text{ク}}$ を得る。

以上から，すべての自然数 n について，a_n と b_n が正であることもわかる。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(2)　$p = \boxed{\text{ク}}$，$r = \boxed{\text{オ}}$ であることから，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は，それぞれ次の式で与えられる。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} n\left(n + \boxed{\text{サ}}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \boxed{\text{シ}}\left(\boxed{\text{オ}}^{\,n} - \boxed{\text{ス}}\right)$$

(3)　数列 $\{a_n\}$ に対して，初項 3 の数列 $\{c_n\}$ が次を満たすとする。

$$a_n c_{n+1} - 4a_{n+1}c_n + 3c_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

a_n が正であることから，⑥ を変形して，$c_{n+1} = \dfrac{\boxed{\text{セ}}\,a_{n+1}}{a_n + \boxed{\text{ソ}}}c_n$ を得る。

さらに，$p = \boxed{\text{ク}}$ であることから，数列 $\{c_n\}$ は $\boxed{\text{タ}}$ ことがわかる。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪	すべての項が同じ値をとる数列である
①	公差が 0 でない等差数列である
②	公比が 1 より大きい等比数列である
③	公比が 1 より小さい等比数列である
④	等差数列でも等比数列でもない

(4)　q，u は定数で，$q \neq 0$ とする。数列 $\{b_n\}$ に対して，初項 3 の数列 $\{d_n\}$ が次を満たすとする。

$$d_n b_{n+1} - q d_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

$r = \boxed{\text{オ}}$ であることから，⑦ を変形して，$d_{n+1} = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{q}(d_n + u)$ を得る。したがって，数列 $\{d_n\}$ が，公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は，$q > \boxed{\text{ツ}}$ かつ $u = \boxed{\text{テ}}$ である。