第４問　（選択問題）（配点　20）

$a_n = \boxed{3} + (n-1)p$ …②　　$b_n = \boxed{3} r^{n-1}$
ア　　　　　　　　　　　　　　　　　イ
$a_{n+1} = 3 + np$ …③

初項３，公差 p の等差数列を $\{a_n\}$ とし，初項３，公比 r の等比数列を $\{b_n\}$ とする。ただし，$p \neq 0$ かつ $r \neq 0$ とする。さらに，これらの数列が次を満たすとする。

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1}b_n + 3b_{n+1} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots\cdots ①$$

(1)　p と r の値を求めよう。自然数 n について，a_n，a_{n+1}，b_n はそれぞれ

$$a_n = \boxed{3} + (n-1)p \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$
ア（１点）

$$a_{n+1} = \boxed{3} + np \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$
ア

$$b_n = \boxed{3} r^{n-1}$$
イ（１点）

と表される。$r \neq 0$ により，すべての自然数 n について，$b_n \neq 0$ となる。

$\boxed{\dfrac{b_{n+1}}{b_n}} = r$ であることから，① の両辺を b_n で割ることにより

$$\boxed{2} a_{n+1} = r\left(a_n + \boxed{3}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$
ウ　エ（２点）

が成り立つことがわかる。④ に ② と ③ を代入すると

$$\left(r - \boxed{2}\right)pn = r\left(p - \boxed{6}\right) + \boxed{6} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$
オ　カ　キ（２点）

となる。⑤ がすべての n で成り立つことおよび $p \neq 0$ により，$r = \boxed{2}$ を得る。さらに，このことから，$p = \boxed{3}$ を得る。
オ　ク（２点）

以上から，すべての自然数 n について，a_n と b_n が正であることもわかる。

①の両辺をb_nで割ると

$a_n \cdot \boxed{\dfrac{b_{n+1}}{b_n}} - 2a_{n+1} + 3\boxed{\dfrac{b_{n+1}}{b_n}} = 0$

$\boxed{\dfrac{b_{n+1}}{b_n}} = r$

であるから

$r a_n - 2a_{n+1} + 3r = 0$

$\boxed{2a_{n+1} = r(a_n + 3)}$ …④
ウ　エ

④に②,③を代入すると

$2(3+np) = r\{3+(n-1)p+3\}$

$6 + 2pn = 6r + rpn - rp$

すなわち

$\boxed{(r-2)pn = r(p-6)+6}$ …⑤
オ　カ　キ

⑤がすべてのnで成り立つことおよび $p \neq 0$

により　$r = 2$　を得る　← 答えにかいてあるが，右辺はnによらない値なので左辺のnの係数 $(r-2)p$ は0になる

このことから⑤は

$0 = 2(p-6)+6$

よって　$p = \boxed{3}$
ク

以上から　$p = 3$，$r = 2$ であるから

$a_n = 3 + (n-1)3 = 3n > 0$

$b_n = 3 \cdot 2^{n-1} > 0$

(2)　$p = \boxed{3}$（ク），$r = \boxed{2}$（オ）であることから，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和は，それぞれ次の式で与えられる。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}\, n\left(n + \boxed{1}\right)$$

ケ　コ　サ（2点）

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \boxed{3}\left(\boxed{2}^{\,n} - \boxed{1}\right)$$

シ　オ　ス（2点）

(2)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 3k = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{3}{2}n(n+1)}$$ ケコサ

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 2^{k-1} = \frac{3(2^n - 1)}{2-1} = \boxed{3(2^n-1)}$$ シス

↑初項3，公比2，項数 n の等比数列の和

(3)　数列 $\{a_n\}$ に対して，初項 3 の数列 $\{c_n\}$ が次を満たすとする。

$$a_n c_{n+1} - 4a_{n+1}c_n + 3c_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

a_n が正であることから，⑥ を変形して，$c_{n+1} = \dfrac{\boxed{4}\,a_{n+1}}{a_n + \boxed{3}}\,c_n$ を得る。

セ　ソ（2点）

さらに，$p = \boxed{3}$（ク）であることから，数列 $\{c_n\}$ は $\boxed{②}$ ことがわかる。

タ（2点）

$\boxed{タ}$ の解答群

⓪	すべての項が同じ値をとる数列である
①	公差が 0 でない等差数列である
②	公比が 1 より大きい等比数列である
③	公比が 1 より小さい等比数列である
④	等差数列でも等比数列でもない

(3)

⑥を変形して

$(a_n+3)c_{n+1} = 4a_{n+1}c_n$

両辺を $a_n+3(>0)$ でわって

$$\boxed{c_{n+1} = \frac{4a_{n+1}}{a_n+3}c_n}$$ セソ

$a_n = 3n$ であるから

$$c_{n+1} = \frac{4 \cdot 3(n+1)}{3n+3}c_n = \frac{4\cdot 3(n+1)}{3(n+1)}c_n = 4c_n$$

数列 $\{c_n\}$ は公比が 4 の等比数列である

ゆえに $\boxed{2}$ タ

補　$a_{n+1} = a_n + 3$ より $\dfrac{a_{n+1}}{a_n+3} = 1$ なので $c_{n+1} = 4c_n$

(4)　q，u は定数で，$q \neq 0$ とする。数列 $\{b_n\}$ に対して，初項 3 の数列 $\{d_n\}$ が次を満たすとする。

$$d_n b_{n+1} - q d_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

$r = \boxed{2}$（オ）であることから，⑦ を変形して，$d_{n+1} = \dfrac{\boxed{2}}{q}(d_n + u)$ を得る。

チ（2点）

したがって，数列 $\{d_n\}$ が，公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は，$q > \boxed{2}$ かつ $u = \boxed{0}$ である。

ツ（1点）　テ（1点）

(4)

⑦の両辺を b_n で割って

$$d_n \cdot \boxed{\frac{b_{n+1}}{b_n}} - q d_{n+1} + u \boxed{\frac{b_{n+1}}{b_n}} = 0$$

$\boxed{\dfrac{b_{n+1}}{b_n}} = 2$ であるから

$$2d_n - q d_{n+1} + 2u = 0$$

すなわち $q \neq 0$ より $\boxed{d_{n+1} = \dfrac{2}{q}(d_n+u)}$ チ

$d_1 = 3$ より $d_n > 0$ であることが必要

両辺を d_n で割って $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \dfrac{2}{q}\left(1 + \dfrac{u}{d_n}\right)$

これが n によらず定数になる必要があるから $u = 0$

このとき $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \dfrac{2}{q}$

数列 $\{d_n\}$ は公比 $\dfrac{2}{q}$ の等比数列であるから

$0 < \dfrac{2}{q} < 1$

∴ $2 < q$

逆に $q > 2$ かつ $u = 0$ のとき

$d_{n+1} = \dfrac{2}{q}d_n \left(0 < \dfrac{2}{q} < 1\right)$ となる

よって 求める必要十分条件は $\boxed{q>2}$ かつ $\boxed{u=0}$

ツ　テ

補　マーク方式なので $u=0$ かつ $0<\dfrac{2}{q}<1$ で答えを埋めるとよい