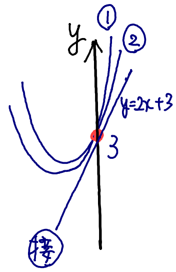
数学Ⅱ・数学B

第２問 （必答問題）（配点　30）

(1)　座標平面上で，次の二つの２次関数のグラフについて考える。

$y = 3x^2 + 2x + 3$ ……………………………… ①

$y = 2x^2 + 2x + 3$ ……………………………… ②



①,②で $x=0$ としていずれも $y=3$

y軸との交点のy座標は $\boxed{3}$ ア

①②は y軸上の点(0,3)を通る

①,②をそれぞれxで微分して

$y'=6x+2$

$y'=4x+2$

$x=0$ としていずれも $y'=2$

よって y軸との交点における接線の方程式は $\boxed{y=2x+3}$ イ ウ

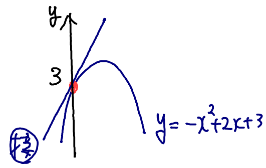
①，② の２次関数のグラフには次の**共通点**がある。

共通点

- y 軸との交点の y 座標は $\boxed{3}$ ア(1点) である。
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{2}$ イ $x + \boxed{3}$ ウ(2点) である。

次の⓪～⑤の２次関数のグラフのうち，y 軸との交点における接線の方程式が $y = \boxed{2}$ イ $x + \boxed{3}$ ウ となるものは $\boxed{④}$ である。

$y=-x^2+2x+3$ エ(2点)



点(0,3)を通るので（y切片が3）③,④,⑤にしぼられる

そのうち $x=0$ における微分係数が2となるものは ④

	y'	$x=0$のときのy'
③	$4x-2$	-2
④	$-2x+2$	2
⑤	$-2x-2$	-2

よって $\boxed{④}$ エ

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $y = 3x^2 - 2x - 3$	① $y = -3x^2 + 2x - 3$
② $y = 2x^2 + 2x - 3$	③ $y = 2x^2 - 2x + 3$
④ $y = -x^2 + 2x + 3$	⑤ $y = -x^2 - 2x + 3$

(補) $y=-x^2+\boxed{2x+3}$, $y=\boxed{2x+3}$ を連立して

$-x^2+2x+3=2x+3$

$x^2=0$

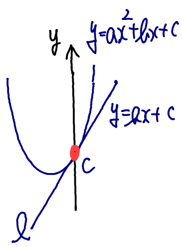
$x=0$ を重解にもつから $x=0$ で接する.

よって $\boxed{④}$ エ

(補) $y=ax^2+\boxed{2x+3}$ $(a \neq 0)$ の y軸との交点における接線の方程式は $y=\boxed{2x+3}$

a，b，c を０でない実数とする。

曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $(0,\ \boxed{c})$ オ(1点) における接線を ℓ とすると，その方程式は $y = \boxed{b}$ カ $x + \boxed{c}$ キ(2点) である。



$y'=2ax+b$

$x=0$ を代入して $y'=b$

よって $y=ax^2+bx+c$ 上の点 $(0,\boxed{c})$ オ における接線 ℓ の方程式は $\boxed{y=bx+c}$ カ キ

(補) $y=ax^2+\boxed{bx+c}$, $y=\boxed{bx+c}$ を連立して

$ax^2+bx+c=bx+c$

$ax^2=0$　$(a \neq 0)$

$x=0$ を重解にもつから $x=0$ で接する

接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{-c}}{\boxed{b}}$ クケ コ（1点）である。

a，b，c が正の実数であるとき，曲線 $y = ax^2 + bx + c$ と接線 ℓ および直線 $x = \dfrac{\boxed{-c}}{\boxed{b}}$ クケ コ で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = \frac{ac^{\boxed{3}}}{\boxed{3}\,b^{\boxed{3}}} \quad\text{……………………………… ③}$$

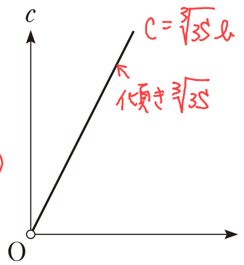
サ シ ス（4点）

である。

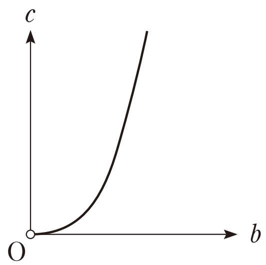
③において，$a = 1$ とし，S の値が一定となるように正の実数 b，c の値を変化させる。このとき，b と c の関係を表すグラフの概形は $\boxed{0}$ である。
セ（3点）

$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

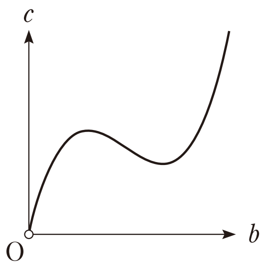
⓪



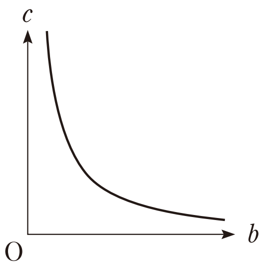
①



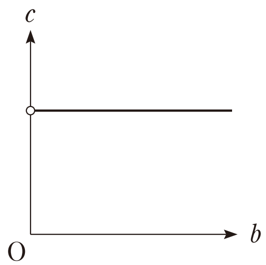
②



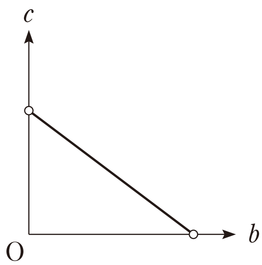
③



④



⑤



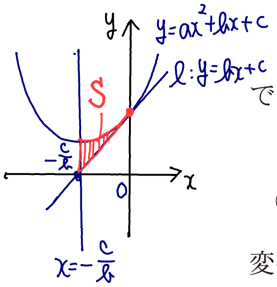
$\ell : y = bx + c$

で $y = 0$ として

$bx + c = 0$

$\therefore\ x = \boxed{-\dfrac{c}{b}}$ クケ コ

$a>0,\ b>0,\ c>0$ のとき $-\dfrac{c}{b}<0$



$S=\displaystyle\int_{-\frac{c}{b}}^{0}\{(ax^2+bx+c)-(bx+c)\}\,dx$

$=\displaystyle\int_{-\frac{c}{b}}^{0} ax^2\,dx$

$=\left[\dfrac{a}{3}x^3\right]_{-\frac{c}{b}}^{0}$

$=0-\dfrac{a}{3}\left(-\dfrac{c}{b}\right)^3$

$=\boxed{\dfrac{ac^3}{3b^3}}$ サ シス …③

③で $a=1$ とすると

$S=\dfrac{c^3}{3b^3}$ (>0)

Sの値が一定となるように正の実数 b, c の値を変化させると

$c^3=3Sb^3$

両辺 $\frac{1}{3}$ 乗して

$c=\sqrt[3]{3S}\,b$

$\sqrt[3]{3S}>0$ より c は b の1次関数

グラフは 傾きが $\sqrt[3]{3S}$ の直線なので $\boxed{0}$ セ

(2)　座標平面上で，次の三つの3次関数のグラフについて考える。

$y = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ ……………………… ④

$y = -2x^3 + 7x^2 + 3x + 5$ ……………………… ⑤

$y = 5x^3 - x^2 + 3x + 5$ ……………………… ⑥

④，⑤，⑥ で $x=0$ として
いずれも $y=5$
y 軸との交点の y 座標は $\boxed{5}$
ツ

④，⑤，⑥ をそれぞれ
x で微分して
$y' = 12x^2 + 4x + 3$
$y' = -6x^2 + 14x + 3$
$y' = 15x^2 - 2x + 3$
$x=0$ としていずれも
$y' = 3$

y 軸との交点 $(0, 5)$ における
接線の方程式は
$\boxed{y = 3x + 5}$
タ　チ

④，⑤，⑥ の3次関数のグラフには次の**共通点**がある。

共通点

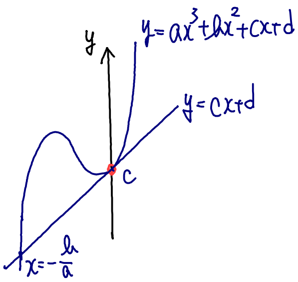
- y 軸との交点の y 座標は $\boxed{5}$ である。
ツ (1点)
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{3}\,x + \boxed{5}$ である。
タ　チ (2点)

a，b，c，d を0でない実数とする。

曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{d}\right)$ における接線の方程式
ツ (1点)

は $y = \boxed{c}\,x + \boxed{d}$ である。
テ　ト (2点)

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
上の点 $(0, \boxed{d})$ における
ツ
接線の方程式は
$y' = 3ax^2 + 2bx + c$
に $x=0$ を代入して
$y' = c$
となることから
$\boxed{y = cx + d}$
テ　ト



補
$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + \boxed{cx+d} \\ y = \boxed{cx+d} \end{cases}$
を連立して
$ax^3 + bx^2 + cx + d = cx + d$
$ax^3 + bx^2 = 0$
$x^2(ax + b) = 0$　　$\therefore x = -\frac{b}{a},\ 0$
$a \neq 0,\ b \neq 0$ より　$x=0$ を重解にもつので
$x=0$ で接する

次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=$ $\boxed{c}$ $x+$ $\boxed{d}$ とし，
テ ト
$f(x)-g(x)$について考える。

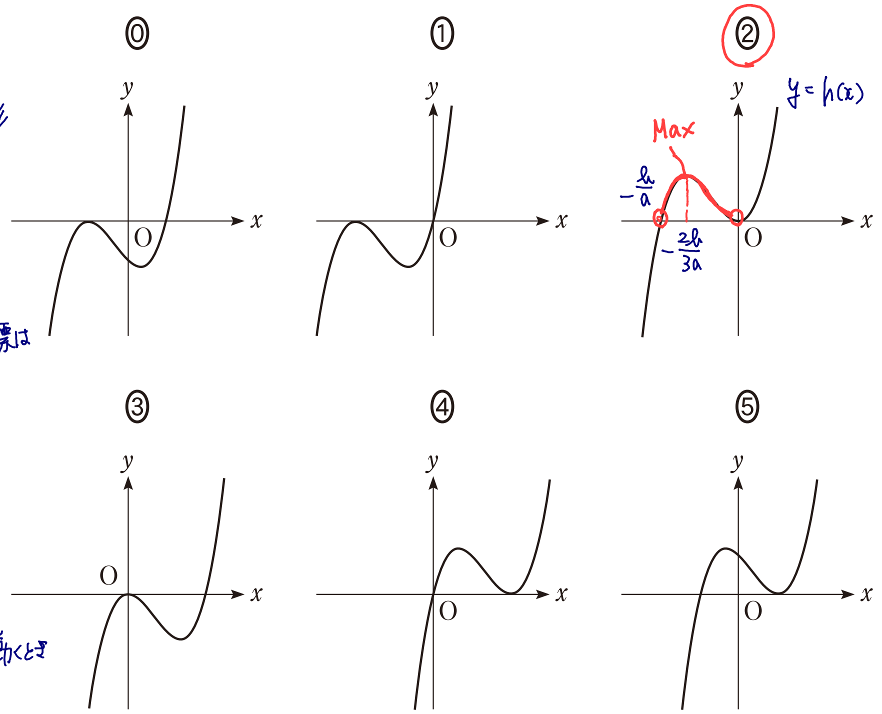
$h(x)=f(x)-g(x)$とおく。a，b，c，dが正の実数であるとき，$y=h(x)$のグラフの概形は $\boxed{②}$ である。
ナ(3点)

$y=f(x)$のグラフと$y=g(x)$のグラフの共有点のx座標は $\dfrac{\boxed{-b}}{\boxed{a}}$ ニヌ ネ

と $\boxed{0}$ である。また，xが $\dfrac{\boxed{-b}}{\boxed{a}}$ と $\boxed{0}$ の間を動くとき，
ノ (2点)

$|f(x)-g(x)|$の値が最大となるのは，$x=\dfrac{\boxed{-2b}}{\boxed{3a}}$ のときである。
ハヒフ
ヘホ(3点)

$\boxed{\text{ナ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。



$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
$g(x)=cx+d$
とし
$h(x)=f(x)-g(x)$
とおくと
$h(x)=ax^3+bx^2$
$=ax^2\left(x+\frac{b}{a}\right)$
$(a>0, b>0, c>0, d>0)$
$h(x)=0$とすると
$x=-\frac{b}{a}, 0$
$a>0, b>0$より
$-\frac{b}{a}<0$
$h'(x)=3ax^2+2bx$
$=x(3ax+2b)$
$h'(x)=0$とすると
$x=-\frac{2b}{3a}, 0$

x	…	$-\frac{2b}{3a}$	…	0	…
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	極大	↘	0	↗

$y=h(x)$のグラフの概形は $\boxed{②}$ ナ

$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$
のグラフの共有点のx座標は
$f(x)-g(x)=0$
すなわち
$h(x)=0$
より $\boxed{-\frac{b}{a}}$ と $\boxed{0}$
ニヌ ネ ノ

xが$-\frac{b}{a}$と0の間を動くとき
$\left(-\frac{b}{a}<x<0\right)$
$f(x)-g(x)>0$
であるから $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)=h(x)$
の値が最大となるのは ② のグラフを考えて $x=\boxed{-\frac{2b}{3a}}$ のときである。
ハヒフ ヘホ