数学Ⅱ・数学B

〔2〕 二つの関数 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ について考える。

(15点)

(1) $f(0)=\boxed{1}$ セ(1点)，$g(0)=\boxed{0}$ ソ(1点) である。また，$f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から，$x=\boxed{0}$ タ(1点) で最小値 $\boxed{1}$ チ(1点) をとる。

$g(x)=-2$ となる x の値は $\log_2\left(\sqrt{\boxed{5}}-\boxed{2}\right)$ である。 ツ テ (2点)

(2) 次の①～④は，x にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$f(-x)=\boxed{f(x)}$ ⓪ ト (1点) ……………………… ①

$g(-x)=\boxed{-g(x)}$ ③ ナ (1点) ……………………… ②

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\boxed{1}$ ニ (2点) ……………………… ③

$g(2x)=\boxed{2}\,f(x)g(x)$ ヌ (2点) ……………………… ④

ト，ナ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

ト ⓪ $f(x)$	① $-f(x)$	② $g(x)$	ナ ③ $-g(x)$

(1) $f(0)=\dfrac{2^0+2^0}{2}=\dfrac{1+1}{2}=\boxed{1}$ ア

$g(0)=\dfrac{2^0-2^0}{2}=\dfrac{1-1}{2}=\boxed{0}$ イ

$2^x\cdot2^{-x}=2^{x+(-x)}=2^0=1$

$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\geqq\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=1$

等号が成り立つのは

$2^x=2^{-x}$

$x=-x$

∴ $x=0$

$f(x)$ は $x=\boxed{0}$ で最小値 $\boxed{1}$ をとる。 タ チ

$g(x)=-2$ とすると

$\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-2$

両辺に2をかけて

$2^x-\dfrac{1}{2^x}=-4$

$2^x=t$ ……⑤

とおくと $t>0$ であり

$t-\dfrac{1}{t}=-4$

両辺に t をかけて

$t^2-1=-4t$

$t^2+4t-1=0$

∴ $t=-2\pm\sqrt5$

$t>0$ なので

$\cancel{t}=-2+\sqrt5$

$\sqrt5-2$

⑤から

$x=\log_2 t$

$=\boxed{\log_2(\sqrt5-2)}$ ツ テ

(2) $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=\boxed{f(x)}$ ⓪ト ……①

$g(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^x}{2}=-\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=\boxed{-g(x)}$ ③ナ ……②

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=\dfrac{2\cdot2^x}{2}\cdot\dfrac{2\cdot2^{-x}}{2}$

$=2^x\cdot2^{-x}$

$=\boxed{1}$ ニ ……③

$g(2x)=\dfrac{2^{2x}-2^{-2x}}{2}=\dfrac{(2^x)^2-(2^{-x})^2}{2}=\dfrac{(2^x+2^{-x})(2^x-2^{-x})}{2}$

$=2\cdot\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\cdot\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$

$=\boxed{2}\,f(x)\,g(x)$ ヌ ……④

(3)　花子さんと太郎さんは，$f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

補 双曲線関数が背景

花子：①～④ は三角関数の性質に似ているね。

太郎：三角関数の加法定理に類似した式(A)～(D)を考えてみたけど，つねに成り立つ式はあるだろうか。

どのような α, β に対しても成り立つ

花子：成り立たない式を見つけるために，式(A)～(D)の β に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうかな。

$\beta=0$

太郎さんが考えた式

$f(\alpha-\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)$ ……………………… (A)

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ ……………………… (B)

$g(\alpha-\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ ……………………… (C)

$g(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)$ ……………………… (D)

(1)，(2)で示されたことのいくつかを利用すると，式(A)～(D)のうち，[(B)] 以外の三つは成り立たないことがわかる。[ネ] は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

ネ(3点)

これを確めないと答えは確定しないのだが マーク なので (A),(C),(D)はダメなので消去法で (B)とする。下の補で確かめてみたが 本番では やらなくてよい

[ネ] の解答群

⓪ (A)　　① (B)　　② (C)　　③ (D)

(A), (B), (C), (D) に $\beta=0$ を代入し，$f(0)=1$, $g(0)=0$ とすると

(A) は $f(\alpha)=f(\alpha)g(0)+g(\alpha)f(0)=f(\alpha)\cdot 0+g(\alpha)\cdot 1=g(\alpha)$

(B) は $f(\alpha)=f(\alpha)f(0)+g(\alpha)g(0)=f(\alpha)\cdot 1+g(\alpha)\cdot 0=f(\alpha)$

(C) は $g(\alpha)=f(\alpha)f(0)+g(\alpha)g(0)=f(\alpha)\cdot 1+g(\alpha)\cdot 0=f(\alpha)$

(D) は $g(\alpha)=f(\alpha)g(0)-g(\alpha)f(0)=f(\alpha)\cdot 0-g(\alpha)\cdot 1=-g(\alpha)$　$\therefore g(\alpha)=0$

(A)(C)(D) はつねに成り立つわけではない。よって [(B)] 以外の三つは成り立たない

①ネ

補 $(B\text{の左辺})=f(\alpha+\beta)=\dfrac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}$

$(B\text{の右辺})=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)=\dfrac{2^{\alpha}+2^{-\alpha}}{2}\cdot\dfrac{2^{\beta}+2^{-\beta}}{2}+\dfrac{2^{\alpha}-2^{-\alpha}}{2}\cdot\dfrac{2^{\beta}-2^{-\beta}}{2}=\dfrac{2^{\alpha+\beta}+2^{\alpha-\beta}+2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{4}+\dfrac{2^{\alpha+\beta}-2^{\alpha-\beta}-2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{4}$

$=\dfrac{2(2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta})}{4}=\dfrac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}$

よって (左辺)=(右辺)であるから (B)はつねに成り立つ