数学Ⅱ・数学B　（注）この科目には，選択問題があります。（17ページ参照。）

第１問 （必答問題）（配点　30）

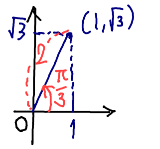
〔1〕

(15点)

(1) 次の**問題A**について考えよう。

> **問題A** 関数 $y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$　ア



$$\sin\frac{\pi}{\boxed{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{\boxed{3}} = \frac{1}{2}$$

ア (2点)　ア

であるから，三角関数の合成により

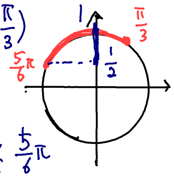
$$y = \boxed{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{3}}\right)$$

イ (2点)　ア

と変形できる。よって，y は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{6}}$ で最大値 $\boxed{2}$ をとる。

ウ　エ (2点)

$y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$
$= 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$
$= 2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$
$= \boxed{2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$
イ



$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{5}{6}\pi$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ のとき y の最大値 $\boxed{2}$ エ

このとき $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

より $\theta = \boxed{\frac{\pi}{6}}$ ウ

(2) p を定数とし，次の**問題B**について考えよう。

> **問題B** 関数 $y = \sin\theta + p\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

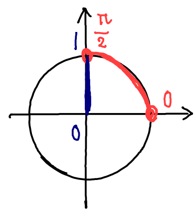
(i) $p = 0$ のとき，y は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{2}}$ で最大値 $\boxed{1}$ をとる。

オ　カ　(オ,カで1点)

$p = 0$ のとき　$y = \sin\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より　$\sin\theta = 1$ のとき最大値 $\boxed{1}$ カ

このとき　$\theta = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ オ



(ii)　$p>0$ のときは，加法定理

$\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$

を用いると

⑨キ(2点)

$y=\sin\theta+p\cos\theta=\sqrt{\boxed{1+p^2}}\cos(\theta-\alpha)$

と表すことができる。ただし，α は

$\sin\alpha=\dfrac{\boxed{1}}{\sqrt{\boxed{1+p^2}}}$ ①ク(1点)，$\cos\alpha=\dfrac{\boxed{p}}{\sqrt{\boxed{1+p^2}}}$ ③ケ(1点)，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

キ　キ

を満たすものとする。このとき，y は $\theta=\boxed{\alpha}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{1+p^2}}$ をとる。

①コ

⑨サ　(コ，サで2点)

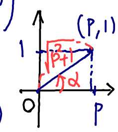
(iii)　$p<0$ のとき，y は $\theta=\boxed{\frac{\pi}{2}}$ で最大値 $\boxed{1}$ をとる。

シ　ス　(シ，スで2点)

(ii) $y=\sin\theta+p\cos\theta$

$=\sqrt{1+p^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta+\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta\right)$

$\sin\alpha$　$\cos\alpha$



$=\sqrt{1+p^2}(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)$

$=\boxed{\sqrt{1+p^2}}\cos(\theta-\alpha)$

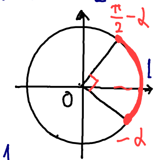
⑨キ

①ク　③ケ

ただし $\boxed{\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}}$

$(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より $-\alpha\leqq\theta-\alpha\leqq\frac{\pi}{2}-\alpha$



$\cos(\theta-\alpha)=1$

のとき y の最大値 $\boxed{\sqrt{1+p^2}}$

⑨サ

そのとき

$\theta-\alpha=0$

$\therefore\ \boxed{\theta=\alpha}$

①コ

$\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪　-1	①　1　(ク，ス)	②　$-p$
③　p　(ケ)	④　$1-p$	⑤　$1+p$
⑥　$-p^2$	⑦　p^2	⑧　$1-p^2$
⑨　$1+p^2$　(キ，サ)	ⓐ　$(1-p)^2$	ⓑ　$(1+p)^2$

$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪　0	①　α　(コ)	②　$\dfrac{\pi}{2}$　(シ)

(iii)　$p<0$ のとき

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ において　$\sin\theta\leqq1$　(等号成立は $\theta=\frac{\pi}{2}$)

$p\cos\theta\leqq0$　(等号成立は $\theta=\frac{\pi}{2}$)　← $p<0$ かつ $\cos\theta\geqq0$

辺々たして　$y=\sin\theta+p\cos\theta\leqq1$　(等号成立は $\theta=\frac{\pi}{2}$)

よって　y は　$\theta=\boxed{\frac{\pi}{2}}$ で最大値 $\boxed{1}$ をとる

②シ