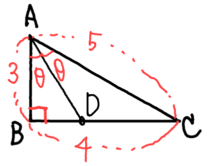
数学Ⅰ・数学A　第3問～第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第5問　（選択問題）（配点　20）

$3^2+4^2=5^2$ より $\angle ABC = 90^\circ$



△ABCにおいて，AB＝3，BC＝4，AC＝5とする。

∠BACの二等分線と辺BCとの交点をDとすると

$$BD = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}},\quad AD = \frac{\boxed{3}\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{2}}$$

ア　イ　(2点)　ウ　エ　オ (2点)

である。

BD : DC = AB : AC = 3 : 5

$BD = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{8}\cdot 4 = \boxed{\frac{3}{2}}$ アイ

△ABD に三平方の定理を用いて

$AD = \sqrt{AB^2+BD^2} = \sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$

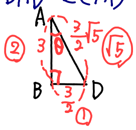
$= \sqrt{3^2\cdot\frac{5}{4}}$

$= \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$ ウエ オ

また，∠BACの二等分線と△ABCの外接円Oとの交点で点Aとは異なる点をEとする。△AECに着目すると

$\angle ABC = 90^\circ$ なので 直径AC

$\angle BAD = \angle CAD = \theta$ とおくと



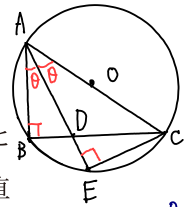
$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$AE = \boxed{2}\sqrt{\boxed{5}}$$

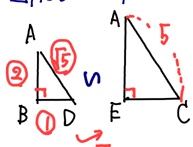
カ　キ　(2点)

である。



$\angle AEC = \angle ABC = 90^\circ$

△ABD ∽ △AEC



$\times\sqrt{5}$

相似比　$1 : \sqrt{5}$

よって

$AE = \sqrt{5}AB$

$= \boxed{2\sqrt{5}}$ カキ

△ABCの2辺ABとACの両方に接し，外接円Oに内接する円の中心をPとする。円Pの半径を r とする。さらに，円Pと外接円Oとの接点をFとし，直線PFと外接円Oとの交点で点Fとは異なる点をGとする。このとき

点Pは∠BACの二等分線上 つまり 線分AE上にある

$$AP = \sqrt{\boxed{5}}\,r,\quad PG = \boxed{5} - r$$

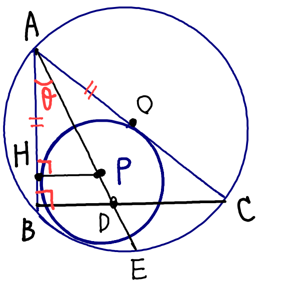
ク (2点)　ケ (2点)

と表せる。したがって，方べきの定理により $r = \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{4}}$ である。

コ　サ (2点)

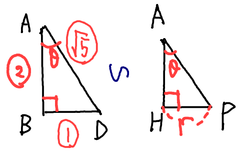
円Pと辺ABの接点をHとすると

PH = r



$\angle AHP = \angle ABD = 90^\circ$

△ABD ∽ △AHP



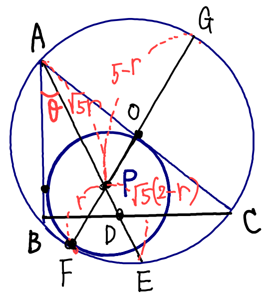
$AP = \sqrt{5}\,PH$

$= \boxed{\sqrt{5}\,r}$

ク

$AH = 2PH$

$= 2r$ …①



円Pは円Oに内接するので

F, P, O, G は同一直線上にあるから

線分FGは円Oの直径となる

FG = AC = 5

FP = r なので

PG = FG − FP

$= \boxed{5 - r}$

ケ

PE = AE − AP

$= 2\sqrt{5} - \sqrt{5}r$

$= \sqrt{5}(2-r)$

方べきの定理を用いて

PA・PE = PF・PG

より

$\sqrt{5}r\cdot\sqrt{5}(2-r) = r(5-r)$

両辺をrでわって

$5(2-r) = 5-r$

$10-5r = 5-r$

よって　$r = \boxed{\frac{5}{4}}$ コ サ

これより　$AP = \frac{5}{4}\sqrt{5}$

△ABC の内心を Q とする。内接円 Q の半径は $\boxed{1}$ で，AQ = $\sqrt{\boxed{5}}$
シ(2点)　ス(2点)

である。また，円 P と辺 AB との接点を H とすると，AH = $\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$ である。
セ　ソ(2点)

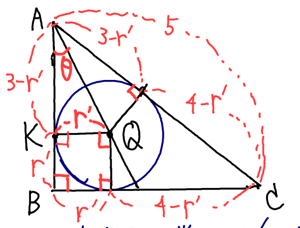
以上から，点 H に関する次の(a)，(b)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{①}$ である。
タ(2点)

(a)　点 H は 3 点 B，D，Q を通る円の周上にある。

(b)　点 H は 3 点 B，E，Q を通る円の周上にある。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤



△ABCの内接円Qの半径をr'とすると

(△ABCの面積) = $\frac{r'}{2}$(AB+BC+CA)

より　$\frac{1}{2}\cdot3\cdot4 = \frac{r'}{2}(3+4+5)$

∴ $r' = \boxed{1}$　シ

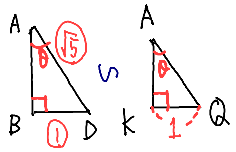
別　線分ACの長さに着目して

$(3-r')+(4-r')=5$

よって　$r'=\boxed{1}$　ス

点Qと辺ABの接点をKとすると

△ABD ∽ △AKQ



$AQ=\sqrt{5}\,QK$

$=\boxed{\sqrt{5}}$　ス

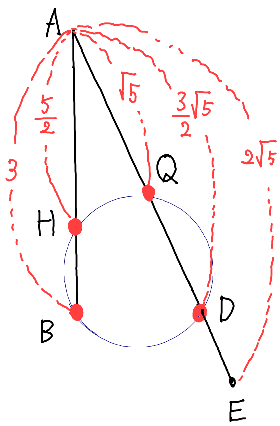
① から　$AH = 2r = 2\cdot\frac{5}{4} = \boxed{\frac{5}{2}}$　セ ソ　← 図は前ページ

別　$AH = AO = \frac{1}{2}AC = \boxed{\frac{5}{2}}$

$AH\cdot AB = \frac{5}{2}\cdot3 = \frac{15}{2}$　方べきが等しい

$AQ\cdot AD = \sqrt{5}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{15}{2}$

$AQ\cdot AE = \sqrt{5}\cdot2\sqrt{5} = 10$



$AH\cdot AB = AQ\cdot AD$

より方べきの定理の逆より

4点H,B,D,Qを通る円が存在する

ので (a) は正しい

$AH\cdot AB \neq AQ\cdot AE$

より 4点H,B,E,Qを通る円が存在しない

ので (b) は誤り

よって　$\boxed{①}$　タ