数学Ⅰ・数学A　第3問～第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

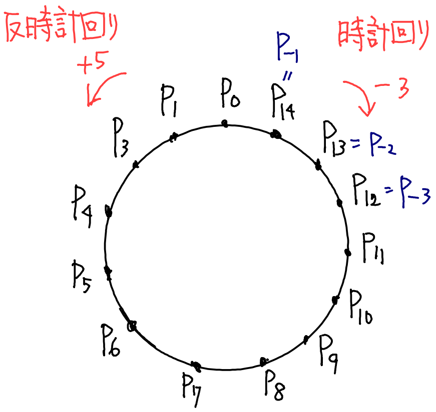
第4問　（選択問題）（配点　20）

円周上に15個の点 P_0，P_1，…，P_{14} が反時計回りに順に並んでいる。最初，点 P_0 に石がある。さいころを投げて偶数の目が出たら石を反時計回りに5個先の点に移動させ，奇数の目が出たら石を時計回りに3個先の点に移動させる。この操作を繰り返す。例えば，石が点 P_5 にあるとき，さいころを投げて6の目が出たら石を点 P_{10} に移動させる。次に，5の目が出たら点 P_{10} にある石を点 P_7 に移動させる。

(1)　さいころを5回投げて，偶数の目が $\boxed{2}$ 回，奇数の目が $\boxed{3}$ 回出れば，点 P_0 にある石を点 P_1 に移動させることができる。このとき，$x = \boxed{2}$，$y = \boxed{3}$ は，不定方程式 $5x - 3y = 1$ の整数解になっている。

ア(1点)　イ(1点)

ア　イ



さいころの目	石の移動
2,4,6（偶数）	反時計回りに5個先の点（+5）
1,3,5（奇数）	時計回りに3個先の点（−3）

任意の整数 n に対して $P_n = P_{n+15}$ ← 15でわって余りが等しいと同じ点

例　$P_0 = P_{15}$，$P_{-1} = P_{14}$，$P_{-2} = P_{13}$，…，$P_{-14} = P_1$

点 P_0 にある石は，さいころを投げて偶数の目が x 回，奇数の目が y 回出たら P_{5x-3y} に移動する。

(1)　さいころを5回投げて点 P_0 にある石の移動は

偶数の目	奇数の目	移動した点
0回	5回	$P_{-15} = P_0$
1回	4回	$P_{-7} = P_8$
$\boxed{2}$ ア 回	$\boxed{3}$ イ 回	P_1
3回	2回	P_9
4回	1回	$P_{17} = P_2$
5回	0回	$P_{25} = P_{10}$

$5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$

⑵ 不定方程式

$$5x - 3y = 8 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のすべての整数解 x, y は，k を整数として

$x = \boxed{2} \times 8 + \boxed{3}k$, $y = \boxed{3} \times 8 + \boxed{5}k$

ア ウ イ エ (3点)

と表される。① の整数解 x, y の中で，$0 \leqq y < \boxed{5}$ を満たすものは
エ

$x = \boxed{4}$, $y = \boxed{4}$

オ(2点) カ(2点)

である。したがって，さいころを $\boxed{8}$ 回投げて，偶数の目が $\boxed{4}$ 回，
キ(1点) オ

奇数の目が $\boxed{4}$ 回出れば，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。
カ

$5x - 3y = 8 \quad \cdots ①$

(1) より $5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$

両辺に 8 をかけて

$5 \cdot 2 \times 8 - 3 \cdot 3 \times 8 = 8 \quad \cdots ②$

① − ② として

$5(x - 2\times8) - 3(y - 3\times8) = 0$

$\therefore\ 5(x - 2\times8) = 3(y - 3\times8)$

5, 3 は互いに素，$x - 2\times8$, $y - 3\times8$ はともに整数であるから，k を整数として

$$\begin{cases} x - 2\times8 = 3k \\ y - 3\times8 = 5k \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} x = 2\times8 + \overset{ウ}{3}k = 3k+16 \\ y = 3\times8 + 5k = 5k+24 \end{cases}$$

エ

と表される。

$0 \leqq y < 5$

をみたすものは，y が整数なので

$y = 0, 1, 2, 3, 4$

$y = 5k + 24$

$= 5(k+4) + 4$

y は 5 で割って余りが 4 であるから

$k + 4 = 0$ つまり $k = -4$ で $y = \boxed{4}$ カ

このとき $x = \boxed{4}$ オ

したがって，さいころ $\boxed{8}$ 回投げて
キ　$4+4$

偶数の目が 4 回，奇数の目が 4 回出れば

点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる

別　$y = 5k + 24$ を代入し

$0 \leqq 5k + 24 < 5$　-24

$-24 \leqq 5k \leqq -19$

$5k$ が 5 の倍数なので

$5k = -20$

$\therefore\ k = -4$

補　$5 \cdot 4 - 3 \cdot 4 = 8$

(3) (2)において，さいころを $\boxed{8}$ 回より少ない回数だけ投げて，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることはできないだろうか。

キ

7回以下で P_8 に移動できるケースをみつける

$P_8 = P_{-7}$ より
偶数の目が x 回
奇数の目が y 回 $(1 \leqq x+y < 8)$
出るとして
$5x - 3y = -7$
をみたすことを考えると
$5 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -7$
$\therefore\ x = \boxed{1}$ ク，$y = \boxed{4}$ ケ
さいころを投げる回数は
$1+4 = \boxed{5}$ 回 コ

補 (1)で $5 \cdot 4 - 3 \cdot 4 = 8$
$5 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -7$ ← $-15 = 5(-3)$

（＊） 石を反時計回りまたは時計回りに 15 個先の点に移動させると元の点に戻る。

$\cdots = P_{-22} = P_{-7} = P_8 = P_{23} = P_{38} = \cdots$

（＊）に注意すると，偶数の目が $\boxed{1}$ 回，奇数の目が $\boxed{4}$ 回出れば，さいころを投げる回数が $\boxed{5}$ 回で，点 P_0 にある石を点 P_8 に移動させることができる。このとき，$\boxed{コ} < \boxed{8}$ である。

ク（2点）　ケ（2点）　コ（1点）　キ

(4) 点 P_1，P_2，…，P_{14} のうちから点を一つ選び，点 P_0 にある石をさいころを何回か投げてその点に移動させる。そのために必要となる，さいころを投げる最小回数を考える。例えば，さいころを 1 回だけ投げて点 P_0 にある石を点 P_2 へ移動させることはできないが，さいころを 2 回投げて偶数の目と奇数の目が 1 回ずつ出れば，点 P_0 にある石を点 P_2 へ移動させることができる。したがって，点 P_2 を選んだ場合には，この最小回数は 2 回である。

点 P_1，P_2，…，P_{14} のうち，この最小回数が最も大きいのは点 $\boxed{P_{13}}$ であり，その最小回数は $\boxed{6}$ 回である。

③サ（2点）　シ（3点）

↖ 答えは1桁なのでかき出してなんとかなりそう

(3)のように求めるとよいがメンドーなので樹形図で解いた

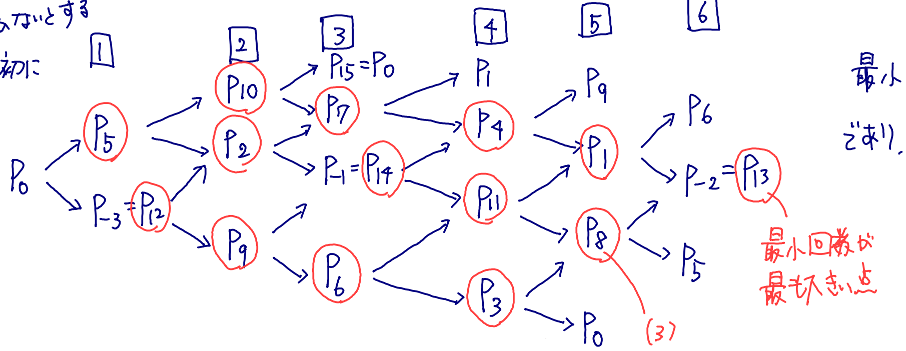
右上矢印は偶数の目
右下矢印は奇数の目
の移動とする。

$P_n \nearrow P_{n+5}$
$P_n \searrow P_{n-3}$

それまでに移動させた点の場合は，それ以降はかかないとする
○は石が最初に移動した点

$\boxed{サ}$ の解答群

⓪ P_{10}	① P_{11}	② P_{12}	③ P_{13}	④ P_{14}



最小回数が最も大きいのは点 $\boxed{P_{13}}$ ③サ
であり，最小回数は $\boxed{6}$ 回 シ