数学Ⅰ・数学A　第3問～第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第3問　（選択問題）（配点　20）

中にくじが入っている箱が複数あり，各箱の外見は同じであるが，当たりくじを引く確率は異なっている。くじ引きの結果から，どの箱からくじを引いた可能性が高いかを，条件付き確率を用いて考えよう。

(1)　当たりくじを引く確率が $\frac{1}{2}$ である箱Aと，当たりくじを引く確率が $\frac{1}{3}$ である箱Bの二つの箱の場合を考える。

「当たりくじ」ではないくじを「はずれくじ」ということにして

箱	A	B
当たりくじを引く確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
はずれくじを引く確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

(i)　各箱で，くじを1本引いてはもとに戻す試行を3回繰り返したとき

箱Aにおいて，3回中ちょうど1回当たる確率は $\frac{\boxed{3}\ ア}{\boxed{8}\ イ}$ …①　(2点)

(2回はずれ)

${}_3C_1\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boxed{\frac{3}{8}}$ ア イ

箱Bにおいて，3回中ちょうど1回当たる確率は $\frac{\boxed{4}\ ウ}{\boxed{9}\ エ}$ …②　(3点)

(2回はずれ)

${}_3C_1\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\boxed{\frac{4}{9}}$ ウ エ

である。

(ii)　まず，AとBのどちらか一方の箱をでたらめに選ぶ。次にその選んだ箱において，くじを1本引いてはもとに戻す試行を3回繰り返したところ，3回中ちょうど1回当たった。このとき，箱Aが選ばれる事象を A，箱Bが選ばれる事象を B，3回中ちょうど1回当たる事象を W とすると

$P(A\cap W)=P(A)\cdot P_A(W)$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}$
$=\frac{3}{16}=\frac{27}{144}$

$P(B\cap W)=P(B)\,P_B(W)$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}$
$=\frac{2}{9}=\frac{32}{144}$

$$P(A\cap W)=\frac{1}{2}\times\frac{\boxed{3}\ ア}{\boxed{8}\ イ},\quad P(B\cap W)=\frac{1}{2}\times\frac{\boxed{4}\ ウ}{\boxed{9}\ エ}$$

箱Aを選ぶ確率　①　　箱Bを選ぶ確率　②

である。$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)$ であるから，3回中ちょうど1回当たったとき，選んだ箱がAである条件付き確率 $P_W(A)$ は $\frac{\boxed{27}\ オカ}{\boxed{59}\ キク}$ (3点) となる。また，条件付き確率 $P_W(B)$ は $\frac{\boxed{32}\ ケコ}{\boxed{59}\ サシ}$ (3点) となる。

$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)$
$=\frac{27}{144}+\frac{32}{144}$
$=\frac{59}{144}$

$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\boxed{\frac{27}{59}}$ オカ キク

$P_W(B)=\frac{P(B\cap W)}{P(W)}=\boxed{\frac{32}{59}}$ ケコ サシ

補　$P_W(A)+P_W(B)=1$

$P(A)=P(B)\left(=\frac{1}{2}\right)$ より

$$\frac{P_W(A)}{P_W(B)}=\frac{\frac{P(A\cap W)}{P(W)}}{\frac{P(B\cap W)}{P(W)}}=\frac{P(A\cap W)}{P(B\cap W)}=\frac{P(A)P_A(W)}{P(B)P_B(W)}=\frac{\frac{1}{2}P_A(W)}{\frac{1}{2}P_B(W)}=\frac{P_A(W)}{P_B(W)}=\frac{①}{②}$$

よって，$P_W(A)$ と $P_W(B)$ の $\boxed{比}$ は ① と ② の 比に等しい ③ス

このことから $P_W(A)=\frac{①}{①+②}$ となる.

(3)(4)はコレを考える

(2) (1)の $P_W(A)$ と $P_W(B)$ について，次の**事実(＊)**が成り立つ。

事実(＊)

$P_W(A)$ と $P_W(B)$ の $\boxed{\text{比}}$ は，① の確率と ② の確率の $\boxed{\text{比}}$ に等しい。

ス　③ス (3点)

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ 和　① 2 乗の和　② 3 乗の和　③ 比　④ 積

(3) 花子さんと太郎さんは**事実(＊)**について話している。

花子：**事実(＊)**はなぜ成り立つのかな？

太郎：$P_W(A)$ と $P_W(B)$ を求めるのに必要な $P(A\cap W)$ と $P(B\cap W)$ の計算で，①, ② の確率に同じ数 $\frac{1}{2}$ をかけているからだよ。

花子：なるほどね。外見が同じ三つの箱の場合は，同じ数 $\frac{1}{3}$ をかけることになるので，同様のことが成り立ちそうだね。

当たりくじを引く確率が，$\frac{1}{2}$ である箱 A，$\frac{1}{3}$ である箱 B，$\frac{1}{4}$ である箱 C の三つの箱の場合を考える。まず，A，B，C のうちどれか一つの箱をでたらめに選ぶ。次にその選んだ箱において，くじを 1 本引いてはもとに戻す試行を 3 回繰り返したところ，3 回中ちょうど 1 回当たった。このとき，選んだ箱が A である条件付き確率は $\frac{\boxed{216}}{\boxed{715}}$ となる。

セソタ　チツテ (4点)

箱	A	B	C
当たりくじを引く確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
はずれくじを引く確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$

箱Cにおいて，3回中ちょうど1回当たる確率は

$${}_3C_1\,\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}\quad\cdots③$$

箱Cが選ばれる事象をCとし，事実(＊)を考えて

$$P_W(A)=\frac{P_A(W)}{P_A(W)+P_B(W)+P_C(W)}=\frac{①}{①+②+③}$$

$$=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{4}{9}+\frac{27}{64}}=\frac{\frac{216}{64\cdot9}}{\frac{216+256+243}{64\cdot9}}=\boxed{\frac{216}{715}}$$

セソタ
チツテ

(4)

花子：どうやら箱が三つの場合でも，条件付き確率の $\boxed{\text{比}}$ は各箱で3回中ちょうど1回当たりくじを引く確率の $\boxed{\text{比}}$ になっているみたいだね。

ス　ス

太郎：そうだね。それを利用すると，条件付き確率の値は計算しなくても，その大きさを比較することができるね。

当たりくじを引く確率が，$\frac{1}{2}$ である箱A，$\frac{1}{3}$ である箱B，$\frac{1}{4}$ である箱C，$\frac{1}{5}$ である箱Dの四つの箱の場合を考える。まず，A，B，C，Dのうちどれか一つの箱をでたらめに選ぶ。次にその選んだ箱において，くじを1本引いてはもとに戻す試行を3回繰り返したところ，3回中ちょうど1回当たった。このとき，条件付き確率を用いて，どの箱からくじを引いた可能性が高いかを考える。可能性が高い方から順に並べると $\boxed{8}$ となる。

ト(3点)

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

~~⓪~~ A，B，C，D	~~①~~ A，B，D，C	~~②~~ A，C，B，D
~~③~~ A，C，D，B	~~④~~ A，D，B，C	~~⑤~~ B，A，C，D
~~⑥~~ B，A，D，C	~~⑦~~ B，C，A，D	⑧ B，C，D，A

条件付き確率を用いない新課程向けの解法
↓
補 3回くじを引いたときの当たりくじを引く回数の期待値を各箱で求めると

箱Aは $\frac12\times3=\frac32=1.5$(回)
箱Bは $\frac13\times3=1$ (回)
箱Cは $\frac14\times3=\frac34=0.75$(回)
箱Dは $\frac15\times3=\frac35=0.6$(回)

D C B A
0.6 0.75 1 1.5

1回に近いものが可能性が高いので高い順に
B, C, D, A $\boxed{8}$ ト

箱	A	B	C	D
当たりくじを引く確率	$\frac12$	$\frac13$	$\frac14$	$\frac15$
はずれくじを引く確率	$\frac12$	$\frac23$	$\frac34$	$\frac45$

箱Dにおいて，3回中ちょうど1回当たる確率は

$${}_3C_1\,\frac15\left(\frac45\right)^2=\frac{48}{125}\quad\cdots ④$$

箱Dが選ばれる事象をDとし，事実(W)を考えて

$$P_W(A):P_W(B):P_W(C):P_W(D)=①:②:③:④$$
$$=\frac38:\frac49:\frac{27}{64}:\frac{48}{125}$$

4つまとめて大小を調べるのは大変なので解答群をみつつ，2つずつ調べる

(1)(ii)より $P_W(A)=\frac{27}{59}$，$P_W(B)=\frac{32}{59}$ なので $P_W(B)>P_W(A)$

⓪①②③④は不適である

補 $\frac49>\frac38$ より ②>① つまり $P_W(B)>P_W(A)$
$\left(\frac{32}{72}>\frac{27}{72}\right)$

$\frac{27}{64}>\frac38\left(=\frac{24}{64}\right)$ より ③>① つまり $P_W(C)>P_W(A)$

⑤⑥は不適であるから⑦,⑧にしぼられる　消去法

$\frac{48}{125}>\frac38\left(=\frac{48}{128}\right)$ より ④>① つまり $P_W(D)>P_W(A)$

分母が大きい方が小さい

⑦は不適なので，適するのは $\boxed{8}$ ト

別 小数で表して大小を調べる
①$=\frac38=0.375$，②$=\frac49=0.444\cdots$，③$=\frac{27}{64}=0.421\cdots$，④$=\frac{48}{125}=0.384$
よって ②>③>④>①