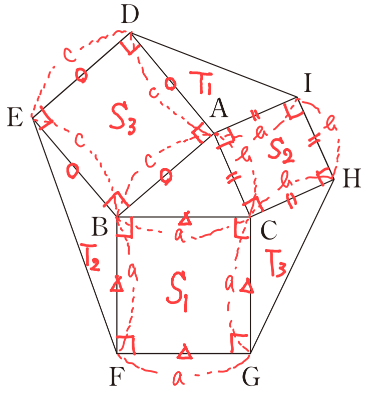
〔2〕 右の図のように，△ABC の外側に辺 AB，BC，CA をそれぞれ 1 辺とする正方形 ADEB，BFGC，CHIA をかき，2 点 E と F，G と H，I と D をそれぞれ線分で結んだ図形を考える。以下において

(20点)

$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$

$\angle CAB = A$，$\angle ABC = B$，$\angle BCA = C$

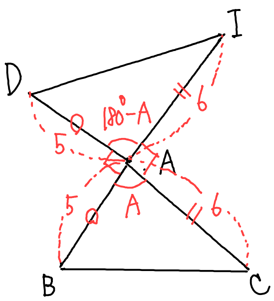
とする。



参考図

(1) $b = 6$，$c = 5$，$\cos A = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin A = \dfrac{\boxed{4}}{\boxed{5}}$ セ ソ (2点) であり，

△ABC の面積は $\boxed{12}$ タチ (2点)，△AID の面積は $\boxed{12}$ ツテ (2点) である。



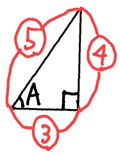
$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$
$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$
$= \frac{16}{25}$

$\sin A > 0$ なので $\sin A = \boxed{\frac{4}{5}}$ セ ソ

別 $\cos A = \frac{3}{5} > 0$ より $0° < A < 90°$

本図の直角三角形から

$\sin A = \boxed{\frac{4}{5}}$ セ ソ



$(\triangle ABC の面積) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \underbrace{\frac{4}{5}}_{\sin A} = \boxed{12}$ タチ

$\angle DAB = \angle IAC = 90°$ であるから $\angle DAI = 180° - A$

ここで $\sin(180° - A) = \sin A = \frac{4}{5}$

$(\triangle AID の面積) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \underbrace{\frac{4}{5}}_{\sin(180°-A)} = \boxed{12}$ ツテ

同じ面積になる!

(2) 正方形 BFGC，CHIA，ADEB の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする。このとき，$S_1 - S_2 - S_3$ は

$S_1 = a^2,\ S_2 = b^2,\ S_3 = c^2$

$S_1 - S_2 - S_3 = a^2 - b^2 - c^2$

△ABCに余弦定理を用いて

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

すなわち $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A$　cosAの値に着目!

ゆえに $S_1 - S_2 - S_3 = \underbrace{-2bc}_{\ominus}\boxed{\cos A}$

ここで $-2bc < 0$

- 0°＜ A ＜ 90° のとき，$\boxed{2}$。ト(1点)
- A ＝ 90° のとき，$\boxed{0}$。ナ(1点)
- 90°＜ A ＜ 180° のとき，$\boxed{1}$。ニ(1点)

• $0° < A < 90°$ のとき $\boxed{\cos A} > 0$ であるから $S_1 - S_2 - S_3 < 0$ $\boxed{2}$ ト

• $A = 90°$ のとき $\boxed{\cos A} = 0$ であるから $S_1 - S_2 - S_3 = 0$ $\boxed{0}$ ナ

• $90° < A < 180°$ のとき $\boxed{\cos A} < 0$ であるから $S_1 - S_2 - S_3 > 0$ $\boxed{1}$ ニ

ト ～ ニ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

ナ ⓪ 0である
ニ ① 正の値である
ト ② 負の値である
③ 正の値も負の値もとる

(3) △AID，△BEF，△CGH の面積をそれぞれ T_1，T_2，T_3 とする。このとき，$\boxed{3}$ である。ヌ(3点)

$\angle IAD = 180° - A,\ \angle EBF = 180° - B,\ \angle GCH = 180° - C$

△ABCの面積をSとして，(1)と同様に考えて

$T_1 = \frac{1}{2}bc\sin(180° - A) = \frac{1}{2}bc\sin A = S$

$T_2 = \frac{1}{2}ca\sin(180° - B) = \frac{1}{2}ca\sin B = S$

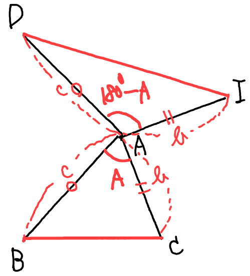
$T_3 = \frac{1}{2}ab\sin(180° - C) = \frac{1}{2}ab\sin C = S$

よって $T_1 = T_2 = T_3\ (= S)$

$\boxed{3}$ ＝ヌ

ヌ の解答群

⓪ $a < b < c$ ならば，$T_1 > T_2 > T_3$
① $a < b < c$ ならば，$T_1 < T_2 < T_3$
② A が鈍角ならば，$T_1 < T_2$ かつ $T_1 < T_3$
③ a，b，c の値に関係なく，$T_1 = T_2 = T_3$



(4) △ABC，△AID，△BEF，△CGH のうち，外接円の半径が最も小さいものを求める。

外接円の半径をそれぞれ R, R_1, R_2, R_3 とする

0°＜ A ＜ 90° のとき，ID $\boxed{>}$ BC であり

②ネ（2点）

(△AID の外接円の半径) $\boxed{>}$ (△ABC の外接円の半径)

R_1　　　　　R

②ノ（2点）

であるから，外接円の半径が最も小さい三角形は

⓪ハ（2点）

- 0°＜ A ＜ B ＜ C ＜ 90° のとき，$\boxed{\triangle ABC}$ である。
- 0°＜ A ＜ B ＜ 90°＜ C のとき，$\boxed{\triangle CGH}$ である。

③ヒ（2点）

0°＜A＜90° のとき 90°＜180°−A＜180°

∠DAI＞∠BAC，AB＝AD＝c，AC＝AI＝ℓ

であるから　ID $\boxed{>}$ BC　← 内角が大きいと対辺は長い

②ネ

△AID，△ABC にそれぞれ正弦定理を用いて

$$\frac{ID}{\sin(180^\circ - A)} = 2R_1$$

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$

$\sin(180^\circ - A) = \sin A$，ID＞BC であるから　$R_1 \boxed{>} R$ …①

②ノ　← 弦が長いと円の半径は大きい

ネ ，ノ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ ＜	① ＝	② ＞

ネ，ノ：②

ハ ，ヒ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ △ABC	① △AID	② △BEF	③ △CGH

ハ：⓪　ヒ：③

- 0°＜A＜B＜C＜90° のとき

△BEF と △ABC，△CGH と △ABC で 上と同様に考えて

$R_2 > R$ …②

$R_3 > R$ …③

①，②，③ より R, R_1, R_2, R_3 のうち最も小さいものは R

$\boxed{⓪}$ ハ

- 0°＜A＜B＜90°＜C のとき

0°＜A＜B＜90° より ①，② が成り立つ

90°＜C ならば 180°−C＜C より AB＞GH

△ABC と △CGH で，上と同様に考えて

$R > R_3$ …④

①，②，④ より R, R_1, R_2, R_3 のうち最も小さいものは R_3

$\boxed{③}$ ヒ