第１問　（必答問題）（配点　30）

〔１〕　c を正の整数とする。x の２次方程式

(10点)

$$2x^2 + (4c-3)x + 2c^2 - c - 11 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について考える。

(1)　$c = 1$ のとき，① の左辺を因数分解すると

$$\left(\boxed{\text{ア}\ 2}\,x + \boxed{\text{イ}\ 5}\right)\left(x - \boxed{\text{ウ}\ 2}\right) \quad (2点)$$

であるから，① の解は

$$x = -\frac{\boxed{\text{ア}\ 2}}{\boxed{\text{イ}\ 5}},\quad \boxed{\text{ウ}\ 2}$$

である。

(1)　c=1のとき

$$(①の左辺) = 2x^2+x-10 = \boxed{(2x+5)(x-2)} \quad ア\ イ\ ウ$$

$2 \times 5 \to 5$, $1 \quad -2 \to -4$, $+1$

① は $(2x+5)(x-2)=0$

解は　$x = -\frac{5}{2},\ 2$ ← 解はともに有理数

(2)　$c = 2$ のとき，① の解は

$$x = \frac{-\boxed{\text{エ}\ 5} \pm \sqrt{\boxed{\text{オカ}\ 65}}}{\boxed{\text{キ}\ 4}} \quad (2点)$$

であり，大きい方の解を α とすると

$$\frac{5}{\alpha} = \frac{\boxed{\text{ク}\ 5} + \sqrt{\boxed{\text{ケコ}\ 65}}}{\boxed{\text{サ}\ 2}} \quad (2点)$$

である。また，$m < \frac{5}{\alpha} < m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{シ}\ 6}$ である。(2点)

↑ mは $\frac{5}{\alpha}$ の整数部分

(2)　c=2のとき

① は　$2x^2+5x-5=0$ ← 解はともに無理数

解は　$x = \boxed{\frac{-5\pm\sqrt{65}}{4}}$　エオ　カキ　ク

↑ ±の＋の方が大きい

大きい方の解を α とすると

$$\alpha = \frac{-5+\sqrt{65}}{4}$$

$$\frac{5}{\alpha} = \frac{20}{\sqrt{65}-5} = \frac{20(\sqrt{65}+5)}{(\sqrt{65}-5)(\sqrt{65}+5)} = \frac{\cancel{20}(\sqrt{65}+5)}{\cancel{65-25}\ 2} = \boxed{\frac{5+\sqrt{65}}{2}} \quad クケコ\ サ$$

(別)　①の解が α なので　$2\alpha^2+5\alpha-5=0$

両辺を α でわって　$2\alpha+5-\frac{5}{\alpha}=0$

すなわち　$\frac{5}{\alpha} = 2\alpha+5 = 2\cdot\frac{-5+\sqrt{65}}{4}+5 = \boxed{\frac{5+\sqrt{65}}{2}}$　クケコ　サ

$64<65<81$ なので　$8<\sqrt{65}<9$

$\frac{5+8}{2} < \frac{5+\sqrt{65}}{2} < \frac{5+9}{2}$ であるから　$\underbrace{\frac{13}{2}}_{6.5} < \frac{5}{\alpha} < 7$

よって　$6 < \frac{5}{\alpha} < 7$　をみたすので

$m = \boxed{6}$　シ

(補)　$\sqrt{65} \fallingdotseq 8$

$\frac{5}{\alpha} = \frac{5+\sqrt{65}}{2} \fallingdotseq \frac{5+8}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$ ← マーク方式なので近似でもよい

(3) 太郎さんと花子さんは，① の解について考察している。

(1)の c=1

太郎：① の解は c の値によって，ともに有理数である場合もあれば，ともに無理数である場合もあるね。c がどのような値のときに，解は有理数になるのかな。

(2)の c=2

花子：2 次方程式の解の公式の根号の中に着目すればいいんじゃないかな。

判別式

① の解が異なる二つの有理数であるような正の整数 c の個数は $\boxed{3}$ 個である。

ス (2点)

① の判別式を D とすると

$$D=(4c-3)^2-8(2c^2-c-11)$$
$$=-16c+97$$

① の解は $x=\dfrac{-(4c-3)\pm\sqrt{D}}{4}=\dfrac{-4c+3\pm\sqrt{-16c+97}}{4}$

① の解が異なる2つの有理数であるならば ① が異なる2つの実数の解をもつ必要があるから D>0 より

$$-16c+97>0$$

すなわち $c<\dfrac{97}{16}\left(=6+\dfrac{1}{16}\right)$

c は正の整数であるから $c=1,2,3,4,5,6$

条件は $\sqrt{D}$ が有理数になることであるが，下表で ① の解が異なる2つの有理数である場合を○とすると

c	$\sqrt{D}$	①の解	
1	$\sqrt{81}=9$	$x=\frac{-1\pm9}{4}=-\frac{5}{2},2$	○ ←(1)
2	$\sqrt{65}$	$x=\frac{-5\pm\sqrt{65}}{4}$	←(2)
3	$\sqrt{49}=7$	$x=\frac{-9\pm7}{4}=-\frac{1}{2},-4$	○
4	$\sqrt{33}$	$x=\frac{-13\pm\sqrt{33}}{4}$	
5	$\sqrt{17}$	$x=\frac{-17\pm\sqrt{17}}{4}$	
6	$\sqrt{1}=1$	$x=\frac{-21\pm1}{4}=-5,-\frac{11}{2}$	○

よって ○ の数より

$\boxed{3}$ 個

ス

解は求めなくても $\sqrt{D}$ だけで答えは求まる！