

第7問 (選択問題) (配点 16)

[1] a, b, c, d, f を実数とし, x, y の方程式

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$$

について, この方程式が表す座標平面上的図形をコンピュータソフトを用いて表示させる。ただし, このコンピュータソフトでは a, b, c, d, f の値は十分に広い範囲で変化させられるものとする。

a, b, c, d, f の値を $a = 2, b = 1, c = -8, d = -4, f = 0$ とすると図1のように楕円が表示された。

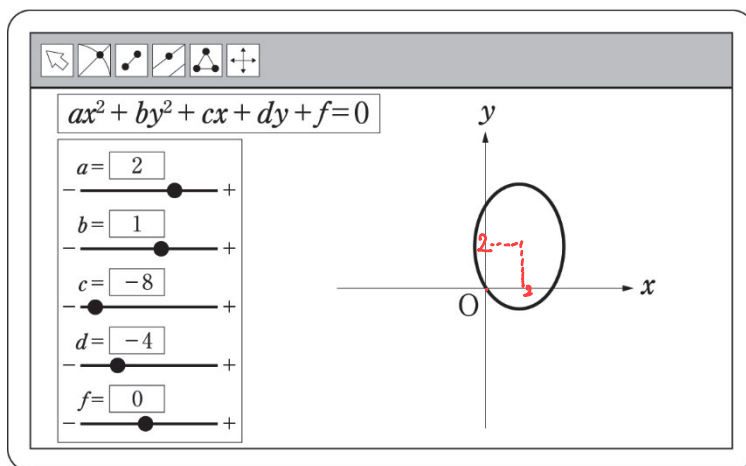


図1

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第7問は次ページに続く。)

$$2x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$$

$$2(x-2)^2 + (y-2)^2 = 12$$

$$\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$$

中心 $(2, 2)$

長軸の長さ $4\sqrt{3}$

短軸の長さ $2\sqrt{6}$

焦点 $(2, 2 \pm \sqrt{6})$

のだ円

← x軸方向12
y軸方向12 ⊕

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$$

中心 $(0, 0)$

長軸の長さ $2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$

短軸の長さ $2\sqrt{6}$

焦点 $(0, \pm\sqrt{6})$

のだ円

$a=2, c=-8, d=-4, f=0$ と値は変えない

方程式 $ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$ の a, c, d, f の値は変えずに、 b の値だけを $b \geq 0$ の範囲で変化させたとき、座標平面上には ②。

ア (4点)

ア の解答群

- ① つねに楕円のみが現れ、円は現れない
- ② 楕円、円、放物線が現れ、他の図形は現れない
- ③ 楕円、円、双曲線が現れ、他の図形は現れない
- ④ 楕円、円、双曲線、放物線が現れ、他の図形は現れない
- ⑤ 楕円、円、双曲線、放物線が現れ、また他の図形が現れることもある

(数学II, 数学B, 数学C第7問は次ページに続く。)

$$2x^2 + by^2 - 8x - 4y = 0$$

1) $b=0$ のとき

① $b=0$ のとき

$$2x^2 - 8x - 4y = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

放物線が現れる

② $b > 0$ のとき

$$2(x-2)^2 + b\left(y - \frac{2}{b}\right)^2 = \frac{4}{b} + 8$$

$$\therefore \frac{4}{b} + 8 > 0$$

$$b=2 \text{ ならば } 2(x-2)^2 + 2(y-1)^2 = 10$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$$

円が現れる

$b \neq 2$ ならば 楕円が現れる

よって 楕円、円、放物線が現れ、他の図形は現れない

補) $b < 0$ の範囲も考える

$$\textcircled{\text{ア}} \frac{4}{b} + 8 < 0$$

$$\Rightarrow \textcircled{\text{ア}} \text{ となり } -\frac{1}{2} < b < 0 \text{ のとき}$$

図形は現れない

$$\textcircled{\text{イ}} \frac{4}{b} + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \textcircled{\text{イ}} \text{ となり } b = -\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$2(x-2)^2 - \frac{1}{2}(y+4)^2 = 0$$

$$(y+4)^2 = 4(x-2)^2$$

$$y+4 = \pm 2(x-2)$$

2本の直線が現れる

$$\textcircled{\text{ウ}} \frac{4}{b} + 8 > 0$$

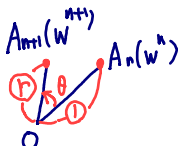
$$\Rightarrow \textcircled{\text{ウ}} \text{ となり } b < -\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

双曲線が現れる

② ア

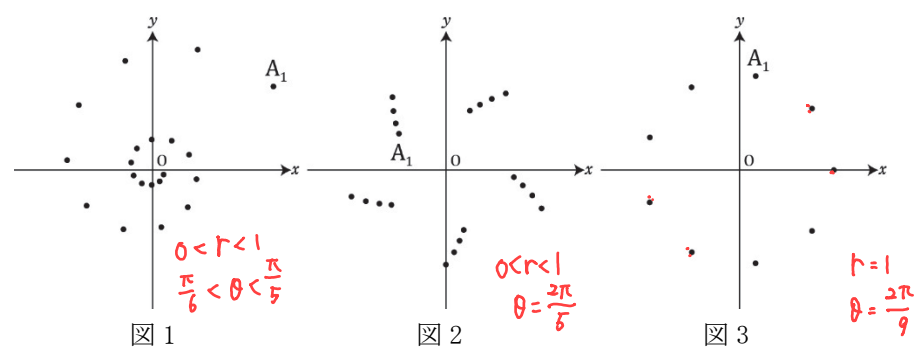
とすると
 $|w| = r \ (r > 0)$
 $\arg w = \theta \ (0 < \theta < \pi)$

$w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$
 $w^2 = r(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$
 $w^3 = r(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$
 \vdots
 $w^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$
 $(n = 1, 2, 3, \dots)$
 $w^{n+1} = w \cdot w^n$

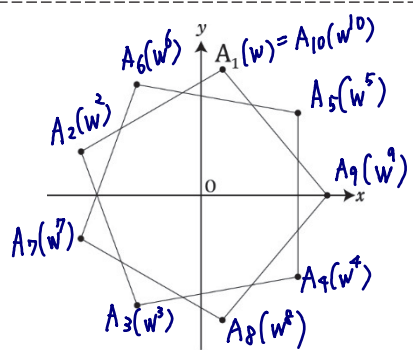
点 $A_n(w^n)$ を原点 O を中心に
 θ 回転して r 倍した点は
 $A_{n+1}(w^{n+1})$


[2] 太郎さんと花子さんは、複素数 w を一つ決めて、 w, w^2, w^3, \dots によって複素数平面上に表されるそれぞれの点 A_1, A_2, A_3, \dots を表示させたときの様子をコンピュータソフトを用いて観察している。ただし、点 w は実軸より上にあるとする。つまり、 w の偏角を $\arg w$ とするとき、 $w \neq 0$ かつ $0 < \arg w < \pi$ を満たすとする。

図1, 図2, 図3は、 w の値を変えて点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{20}$ を表示させたものである。ただし、観察しやすくするために、図1, 図2, 図3の間では、表示範囲を変えている。



太郎: w の値によって、 A_1 から A_{20} までの点の様子もずいぶんいろいろなパターンがあるね。あれ、図3は点が20個ないよ。
 花子: ためしに A_{30} まで表示させても図3は変化しないね。同じところを何度も通っていくんだと思う。
 太郎: 図3に対して、 A_1, A_2, A_3, \dots と線分で結んで点をたどってみると図4のようになったよ。なるほど、 A_1 に戻ってきているね。



← $|w| = 1$ のときは
 $A_1(w) = A_n(w^n)$
 となる自然数 n が存在する。

図4

(数学II, 数学B, 数学C第7問は次ページに続く。)

$A_1(w)$ と $A_n(w^n)$ が重なる

よって $w = w^n$

より $|w|^n = |w|$

$|w|(|w|^{n-1} - 1) = 0$

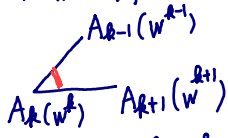
$|w| \neq 0$ ならば $|w|^{n-1} = 1$

よって $|w| = 1$ (1点)

$1 \leq k \leq n-1$ に対して

$$\begin{aligned} |A_k A_{k+1}| &= |w^{k+1} - w^k| \\ &= |w^k(w-1)| \\ &= |w|^k |w-1| \\ &= |w-1| \quad (\because \text{①}) \end{aligned}$$

$2 \leq k \leq n-1$ に対して



$$\begin{aligned} \angle A_k A_{k+1} A_{k-1} &= \arg \frac{w^{k+1} - w^{k-1}}{w^{k+1} - w^k} \\ &= \arg \frac{-w^{k-1}(w-1)}{w(w-1)} \\ &= \arg\left(-\frac{1}{w}\right) \end{aligned}$$

③ 工

図4をもとに、太郎さんは、 A_1, A_2, A_3, \dots と点をとっていった再び A_1 に戻る場合に、点を順に線分で結んでできる図形について一般に考えることにした。すなわち、 A_1 と A_n が重なるような n があるとき、線分 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ をかいてできる図形について考える。このとき、 $w = w^n$ に着目すると $|w| = 1$ であることがわかる。また、次のことが成り立つ。

- $1 \leq k \leq n-1$ に対して $A_k A_{k+1} = \text{①}$ であり、つねに一定である。
- $2 \leq k \leq n-1$ に対して $\angle A_{k+1} A_k A_{k-1} = \text{③}$ であり、つねに一定である。ただし、 $\angle A_{k+1} A_k A_{k-1}$ は、線分 $A_k A_{k+1}$ を線分 $A_k A_{k-1}$ に重なるまで回転させた角とする。

角に向きがある!

花子さんは、 $n = 25$ のとき、すなわち、 A_1 と A_{25} が重なるとき、 A_1 から A_{25} までを順に線分で結んでできる図形が、正多角形になる場合を考えた。このような w の値は全部で 6 個である。また、このような正多角形についてどの場合であっても、それぞれの正多角形に内接する円上の点を z とすると、 z はつねに ⑥ を満たす。

$A_1(w)$ と $A_{25}(w^{25})$ が重なるとき

$w = w^{25}$
 $|w| = 1$
 $w \neq 0$ ならば $w^{24} = 1$
 A_1, A_2, \dots, A_{25} がこの14個に線分を結んでできる図形が正多角形となるのは

ウ の解答群

- ① $|w+1|$ ② $|w-1|$ ③ $|w|+1$ ④ $|w|-1$

エ の解答群

- ① $\arg w$ ② $\arg(-w)$ ③ $\arg \frac{1}{w}$ ④ $\arg\left(-\frac{1}{w}\right)$

カ の解答群

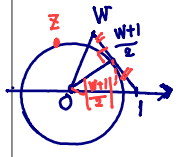
- ① $|z|=1$ ② $|z-w|=1$ ③ $|z|=|w+1|$
 ④ $|z|=|w-1|$ ⑤ $|z-w|=|w+1|$ ⑥ $|z-w|=|w-1|$
 ⑦ $|z| = \frac{|w+1|}{2}$ ⑧ $|z| = \frac{|w-1|}{2}$

①以外の長さは図4 → のようになる

かつ長さは2の正の約数
 長さは1, 2, 3, 4, 6, 12 の6個

この長に対して正多角形になるよって w の値は 6 個

① 中点 $w^{25} = w$ が接点



正多角形に内接する円上の点 z とすると、この円は中心 O 、半径 $\frac{|w+1|}{2}$ の円であるから $|z| = \frac{|w+1|}{2}$ ⑥ カ