

第4問～第7問は、いずれか3問を選択し、解答しなさい。

## 第7問 (選択問題) (配点 16)

[1]  $a, b, c, d, f$  を実数とし、 $x, y$  の方程式

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$$

について、この方程式が表す座標平面上の図形をコンピュータソフトを用いて表示させる。ただし、このコンピュータソフトでは $a, b, c, d, f$ の値は十分に広い範囲で変化させられるものとする。

$a, b, c, d, f$ の値を $a = 2, b = 1, c = -8, d = -4, f = 0$ とすると図1のように楕円が表示された。

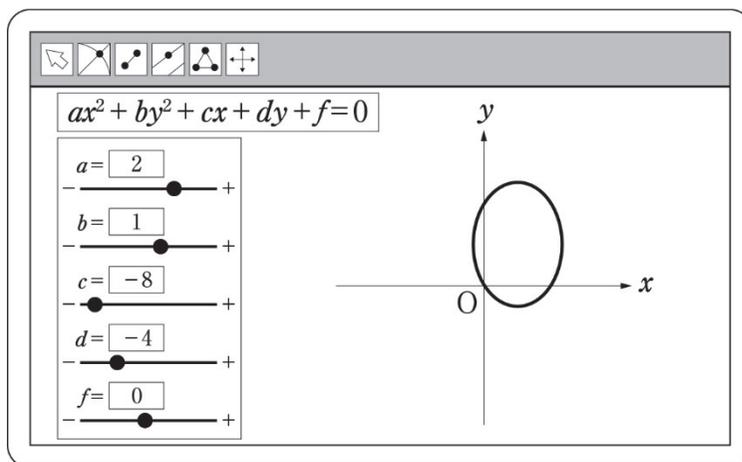


図1

(数学Ⅱ, 数学B, 数学C第7問は次ページに続く。)

方程式  $ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$  の  $a, c, d, f$  の値は変えずに、 $b$  の値だけを  $b \geq 0$  の範囲で変化させたとき、座標平面上には ア。

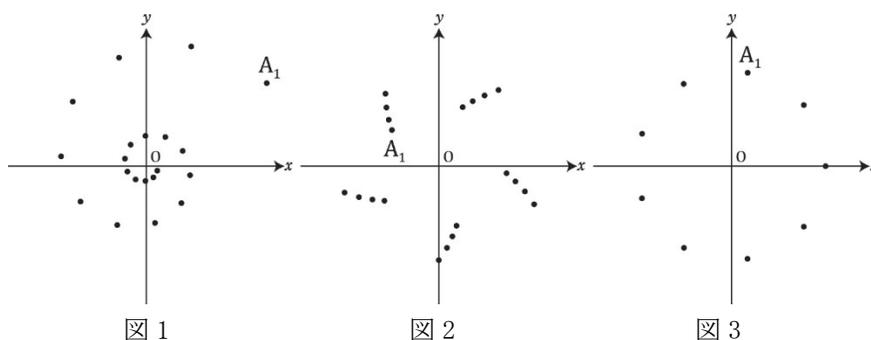
ア の解答群

- ① つねに楕円のみが現れ、円は現れない
- ② 楕円、円が現れ、他の図形は現れない
- ③ 楕円、円、放物線が現れ、他の図形は現れない
- ④ 楕円、円、双曲線が現れ、他の図形は現れない
- ⑤ 楕円、円、双曲線、放物線が現れ、また他の図形が現れることもある

(数学Ⅱ、数学B、数学C第7問は次ページに続く。)

[2] 太郎さんと花子さんは、複素数  $w$  を一つ決めて、 $w, w^2, w^3, \dots$  によって複素数平面上に表されるそれぞれの点  $A_1, A_2, A_3, \dots$  を表示させたときの様子をコンピュータソフトを用いて観察している。ただし、点  $w$  は実軸より上にあるとする。つまり、 $w$  の偏角を  $\arg w$  とするとき、 $w \neq 0$  かつ  $0 < \arg w < \pi$  を満たすとする。

図 1, 図 2, 図 3 は、 $w$  の値を変えて点  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{20}$  を表示させたものである。ただし、観察しやすくするために、図 1, 図 2, 図 3 の間では、表示範囲を変えている。



太郎： $w$  の値によって、 $A_1$  から  $A_{20}$  までの点の様子もずいぶんいろいろなパターンがあるね。あれ、図 3 は点が 20 個ないよ。

花子：ためしに  $A_{30}$  まで表示させても図 3 は変化しないね。同じところを何度も通っていくんだと思う。

太郎：図 3 に対して、 $A_1, A_2, A_3, \dots$  と線分で結んで点をたどってみると図 4 のようになったよ。なるほど、 $A_1$  に戻ってきているね。

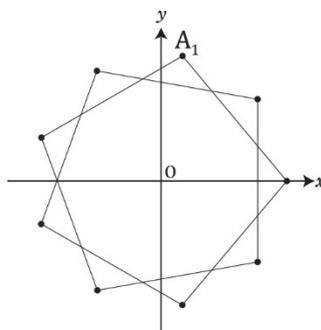


図 4

(数学 II, 数学 B, 数学 C 第 7 問は次ページに続く。)

図4をもとに、太郎さんは、 $A_1, A_2, A_3, \dots$ と点をとって行って再び $A_1$ に戻る場合に、点を順に線分で結んでできる図形について一般に考えることにした。すなわち、 $A_1$ と $A_n$ が重なるような $n$ があるとき、線分 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ をかいてできる図形について考える。このとき、 $w = w^n$ に着目すると $|w| = \boxed{\text{イ}}$ であることがわかる。また、次のことが成り立つ。

- $1 \leq k \leq n-1$ に対して $A_kA_{k+1} = \boxed{\text{ウ}}$ であり、つねに一定である。
- $2 \leq k \leq n-1$ に対して $\angle A_{k+1}A_kA_{k-1} = \boxed{\text{エ}}$ であり、つねに一定である。  
ただし、 $\angle A_{k+1}A_kA_{k-1}$ は、線分 $A_kA_{k+1}$ を線分 $A_kA_{k-1}$ に重なるまで回転させた角とする。

花子さんは、 $n = 25$ のとき、すなわち、 $A_1$ と $A_{25}$ が重なるとき、 $A_1$ から $A_{25}$ までを順に線分で結んでできる図形が、正多角形になる場合を考えた。このような $w$ の値は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個である。また、このような正多角形についてどの場合であっても、それぞれの正多角形に内接する円上の点を $z$ とすると、 $z$ はつねに $\boxed{\text{カ}}$ を満たす。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

- ①  $|w+1|$     ②  $|w-1|$     ③  $|w|+1$     ④  $|w|-1$

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

- ①  $\arg w$     ②  $\arg(-w)$     ③  $\arg \frac{1}{w}$     ④  $\arg\left(-\frac{1}{w}\right)$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

- ①  $|z|=1$     ②  $|z-w|=1$     ③  $|z|=|w+1|$   
 ④  $|z|=|w-1|$     ⑤  $|z-w|=|w+1|$     ⑥  $|z-w|=|w-1|$   
 ⑦  $|z| = \frac{|w+1|}{2}$     ⑧  $|z| = \frac{|w-1|}{2}$