第４問 （配点　20）

中にくじが入っている二つの箱ＡとＢがある。二つの箱の外見は同じであるが，箱Ａでは，当たりくじを引く確率が $\frac{1}{2}$ であり，箱Ｂでは，当たりくじを引く確率が $\frac{1}{3}$ である。

(1)　各箱で，くじを１本引いてはもとに戻す試行を３回繰り返す。このとき

箱Ａにおいて，３回中ちょうど１回当たる確率は $\frac{\boxed{3}\ ア}{\boxed{8}\ イ}$ …①　(2点)

箱Ｂにおいて，３回中ちょうど１回当たる確率は $\frac{\boxed{4}\ ウ}{\boxed{9}\ エ}$ …②　(2点)

である。箱Ａにおいて，３回引いたときに当たりくじを引く回数の期待値は $\frac{\boxed{3}\ オ}{\boxed{2}\ カ}$ (2点) であり，箱Ｂにおいて，３回引いたときに当たりくじを引く回数の期待値は $\boxed{1}$ である。

キ (2点)

（数学Ｉ，数学Ａ第４問は次ページに続く。）

確率について

	箱A	箱B
当たり	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
はずれ	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

箱Aで3回中ちょうど1回当たる確率は $_3C_1\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{8}}$ ア イ

(2回はずれ)

箱Bで3回中ちょうど1回当たる確率は $_3C_1\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{4}{9}}$ ウ エ

(2回はずれ)

箱Aにおいて，3回引いたときに当たりくじを引く回数の期待値は

1回の期待値が $\frac{1}{2}$ なので $\frac{1}{2}\times 3 = \boxed{\frac{3}{2}}$ オ カ

箱Bにおいて，3回引いたときに当たりくじを引く回数の期待値は

1回の期待値が $\frac{1}{3}$ なので $\frac{1}{3}\times 3 = \boxed{1}$ キ

別　箱Aについて

回数	0	1	2	3
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

回数の期待値は $1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=\boxed{\frac{3}{2}}$ オ カ

箱Bについて

回数	0	1	2	3
確率	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

回数の期待値は $1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{8}{27}=\frac{9}{9}=\boxed{1}$ キ

(2)　太郎さんと花子さんは，それぞれくじを引くことにした。ただし，二人は，箱A，箱Bでの当たりくじを引く確率は知っているが，二つの箱のどちらがAで，どちらがBであるかはわからないものとする。

まず，太郎さんが二つの箱のうちの一方をでたらめに選ぶ。そして，その選んだ箱において，くじを1本引いてはもとに戻す試行を3回繰り返したところ，3回中ちょうど1回当たった。 ← (1)と同じことをする

このとき，選ばれた箱がAである事象をA，選ばれた箱がBである事象をB，3回中ちょうど1回当たる事象をWとする。①，②に注意すると

$$P(A\cap W)=\frac{1}{2}\times\frac{\boxed{3}\ \text{ア}}{\boxed{8}\ \text{イ}},\quad P(B\cap W)=\frac{1}{2}\times\frac{\boxed{4}\ \text{ウ}}{\boxed{9}\ \text{エ}}$$

である。$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)$であるから，3回中ちょうど1回当たったとき，選んだ箱がAである条件付き確率$P_W(A)$は$\dfrac{\boxed{27}\ \text{クケ}}{\boxed{59}\ \text{コサ}}$となる。また，条件付き確率$P_W(B)$は$1-P_W(A)$で求められる。 (2点)

（数学Ⅰ，数学A第4問は次ページに続く。）

$P(A\cap W)=P(A)\times P_A(W)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{16}=\frac{27}{144}$

$P(B\cap W)=P(B)\times P_B(W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{9}=\frac{32}{144}$

← 分母を144にそろえておくと計算しやすい

$P(W)=P(A\cup W)+P(B\cup W)=\frac{59}{144}$

よって　$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\boxed{\frac{27}{59}}$ クケ コサ

$P_W(B)=1-P_W(A)=\frac{32}{59}$

次に，花子さんが箱を選ぶ。その選んだ箱において，くじを1本引いてはもとに戻す試行を3回繰り返す。花子さんは，当たりくじをより多く引きたいので，太郎さんのくじの結果をもとに，次の(X)，(Y)のどちらの場合がよいかを考えている。

（X）　太郎さんが選んだ箱と同じ箱を選ぶ。

（Y）　太郎さんが選んだ箱と異なる箱を選ぶ。

花子さんがくじを引くときに起こりうる事象の場合の数は，選んだ箱がA，Bのいずれかの2通りと，3回のうち当たりくじを引く回数が0，1，2，3回のいずれかの4通りの組合せで全部で8通りある。

花子：当たりくじを引く回数の期待値が大きい方の箱を選ぶといいかな。

太郎：当たりくじを引く回数の期待値を求めるには，この8通りについて，それぞれの起こる確率と当たりくじを引く回数との積を考えればいいね。

花子さんは当たりくじを引く回数の期待値が大きい方の箱を選ぶことにした。

(X)の場合について考える。箱Aにおいて3回引いてちょうど1回当たる事象を A_1，箱Bにおいて3回引いてちょうど1回当たる事象を B_1 と表す。

太郎さんが選んだ箱がAである確率 $P_W(A)$ を用いると，花子さんが選んだ箱がAで，かつ，花子さんが3回引いてちょうど1回当たる事象の起こる確率は $P_W(A) \times P(A_1)$ と表せる。このことと同様に考えると，花子さんが選んだ箱がBで，かつ，花子さんが3回引いてちょうど1回当たる事象の起こる確率は $\boxed{\text{シ}}$ と表せる。

③

← $P_W(B) \times P(B_1)$

シ(3点)

花子：残りの6通りも同じように計算すれば，この場合の当たりくじを引く回数の期待値を計算できるね。

太郎：期待値を計算する式は，選んだ箱がAである事象に対する式とBである事象に対する式に分けて整理できそうだよ。

↑ (X)，(Y)のそれぞれで期待値を求める!

（数学Ⅰ，数学A第4問は次ページに続く。）

残りの 6 通りについても同じように考えると，（X）の場合の当たりくじを引く回数の期待値を計算する式は

$$\boxed{\ ②\ }_{ス}\times\frac{\boxed{\ 3\ }_{オ}}{\boxed{\ 2\ }_{カ}}+\boxed{\ ③\ }_{セ}\times\boxed{\ 1\ }_{キ}$$

(4点)

となる。

(X)について　箱Aにおいてちょうどk回当たる事象をA_kとして
(X)での当たりくじを引く回数の期待値は
$1\times P_W(A)\times P(A_1)+2\times P_W(A)\times P(A_2)+3\times P_W(A)\times P(A_3)$
$+\ 1\times P_W(B)\times P(B_1)+2\times P_W(B)\times P(B_2)+3\times P_W(B)\times P(B_3)$
$=P_W(A)\times$(箱Aの期待値)$+P_W(B)\times$(箱Bの期待値)
$=P_W(A)\times\frac{3}{2}+P_W(B)\times 1$
$=\frac{27}{59}\times\frac{3}{2}+\frac{32}{59}\times 1$
$=\frac{81+64}{118}=\frac{145}{118}$ …③
$\boxed{②}$ ス　$\boxed{③}$ セ

（Y）の場合についても同様に考えて計算すると，（Y）の場合の当たりくじを引く回数の期待値は $\dfrac{\boxed{\ 75\ }_{ソタ}}{\boxed{\ 59\ }_{チツ}}$ である。よって，当たりくじを引く回数の期待値が大きい方の箱を選ぶという方針に基づくと，花子さんは，太郎さんが選んだ箱と $\boxed{\ ①\ }_{テ}$。

(3点)

$\boxed{シ}$ の解答群

⓪ $P_W(A)\times P(A_1)$	① $P_W(A)\times P(B_1)$
② $P_W(B)\times P(A_1)$	③ $P_W(B)\times P(B_1)$

$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\dfrac{1}{2}$	① $\dfrac{1}{4}$	② $P_W(A)$ ス	③ $P_W(B)$ セ
④ $\dfrac{1}{2}P_W(A)$		⑤ $\dfrac{1}{2}P_W(B)$	
⑥ $P_W(A)-P_W(B)$		⑦ $P_W(B)-P_W(A)$	
⑧ $\dfrac{P_W(A)-P_W(B)}{2}$		⑨ $\dfrac{P_W(B)-P_W(A)}{2}$	

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ 同じ箱を選ぶ方がよい	① 異なる箱を選ぶ方がよい

テ

(Y)について当たりくじを引く期待値は　異なる箱を選ぶ
$P_W(A)\times$(箱Bの期待値)$+P_W(B)\times$(箱Aの期待値)
$=\frac{27}{59}\times 1+\frac{32}{59}\times\frac{3}{2}=\frac{54+96}{118}=\frac{150}{118}=\boxed{\frac{75}{59}}$ ソタ チツ …④

④>③
(Y)の当たりくじを引く期待値の方が
(X)の当たりくじを引く期待値より大きい
よって 異なる箱を選ぶ方がよい $\boxed{①}$ テ