数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問 （配点　30）

〔1〕

(1)　$x > 0$ とする。$\log_3 x$ を，２を底とする対数を用いて表そう。

$t = \log_3 x$ とおくと，$\boxed{\text{ア}}$ が成り立つ。これにより，$\log_2 x = \boxed{\text{イ}}$ となるので，$t = \boxed{\text{ウ}}$ が得られる。すなわち，$\log_3 x = \boxed{\text{ウ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪　$3 = t^x$	①　$3 = x^t$	②　$x = 3^t$
③　$x = t^3$	④　$t = 3^x$	⑤　$t = x^3$

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪　$2\log_3 t$	①　$3\log_2 t$	②　$t\log_2 3$
③　$t\log_3 2$	④　$\dfrac{\log_2 3}{t}$	⑤　$\dfrac{\log_3 2}{t}$

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪　$3\log_2 x$	①　$x\log_2 3$	②　$\log_2 \dfrac{3}{x}$
③　$\log_2 \dfrac{x}{3}$	④　$\dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}$	⑤　$\dfrac{\log_2 3}{\log_2 x}$

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

⑵ 底が異なる二つの対数について，それらの和と積の大小関係を考えよう。

(i) $x > 0$ とし

$$f(x) = \log_2 x + \log_3 x$$
$$g(x) = (\log_2 x)\cdot(\log_3 x)$$

とおく。不等式

$$f(x) > g(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x の値の範囲を調べる。

$f(x)$ と $g(x)$ を，それぞれ 2 を底とする対数を用いて表すと

$$f(x) = A\log_2 x, \qquad g(x) = B(\log_2 x)^2$$

となる。ここで

$A =$ $\boxed{エ}$，　$B =$ $\boxed{オ}$

である。$X = \log_2 x$ とおくと，X のとり得る値の範囲は実数全体である。

X についての不等式 $AX > BX^2$ を満たす X の値の範囲は

$\boxed{カ} < X < \boxed{キ}$

である。

よって，① を満たす x の値の範囲は

$\boxed{ク} < x < \boxed{ケ}$

である。

$\boxed{エ}$ ～ $\boxed{キ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① 1	② 2
③ -1	④ $\log_2 3$	⑤ $\dfrac{1}{\log_2 3}$
⑥ $(\log_2 3)^2$	⑦ $\dfrac{1}{(\log_2 3)^2}$	⑧ $1+\log_2 3$
⑨ $\dfrac{1}{1+\log_2 3}$	ⓐ $1+\dfrac{1}{\log_2 3}$	ⓑ $\dfrac{\log_2 3}{1+\log_2 3}$

(数学Ⅱ第 1 問は次ページに続く。)

(ii) $x > 0$ とし

$$F(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$G(x) = \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \cdot \left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)$$

とおく。不等式

$$F(x) > G(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を満たす x の値の範囲を調べる。

(1) と同様に考えると，$\log_{\frac{1}{2}} x$ は 2 を底とする対数を用いて $\boxed{\text{コ}}$ と表せる。また，$\log_{\frac{1}{3}} x$ も 3 を底とする対数を用いて表すことができる。

このことから，$f(x)$ と $g(x)$ を (i) で定めた関数とするとき，$F(x)$ と $G(x)$ をそれぞれ $f(x)$ または $g(x)$ を用いて表すと

$$F(x) = \boxed{\text{サ}}, \qquad G(x) = \boxed{\text{シ}}$$

となる。よって，② を満たす x の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} < x < \boxed{\text{ソ}}$$

であることがわかる。

（数学Ⅱ第 1 問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $\log_2 x$	① $-\log_2 x$	② $\dfrac{1}{2}\log_2 x$
③ $-\dfrac{1}{2\log_2 x}$	④ $\dfrac{1}{\log_2 x}$	⑤ $-\log_2 2x$

$\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $f(x)$	① $-f(x)$	② $\dfrac{f(x)}{2}$	③ $\dfrac{f(x)}{3}$	④ $\dfrac{f(x)}{6}$
⑤ $g(x)$	⑥ $-g(x)$	⑦ $\dfrac{g(x)}{2}$	⑧ $\dfrac{g(x)}{3}$	⑨ $\dfrac{g(x)}{6}$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕 花子さんは，三角関数の表を見て，角 θ が 90° に近づくときの $\tan\theta$ の値の変化に興味をもった。なお，表1は三角関数の表の一部である。

表 1

θ	$\tan\theta$
⋮	⋮
81°	6.3138
82°	7.1154
83°	8.1443
⋮	⋮
89°	57.2900
90°	—

そこで，$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対して，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$ と $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ の値を比較してみることにした。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(1) $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ より，分母と分子をそれぞれ $\cos^2 x$ で割ると

$$\tan 2x = \boxed{\text{チ}}$$

となる。さらに $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす α に対して，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{1}{\tan \alpha}$ が成り立つことから，$\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$ は $\tan x$ を用いて

$$\frac{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} = \boxed{\text{ツ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表せる。

タ の解答群

⓪ $\sin x$	① $\cos x$	② $2\sin x$
③ $2\cos x$	④ $\sin^2 x$	⑤ $2\sin^2 x - 1$
⑥ $\cos^2 x$	⑦ $2\cos^2 x - 1$	⑧ $2\sin x \cos x$

チ，ツ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $2\tan x$	① $\dfrac{1}{2\tan x}$	② $\tan^2 x$
③ $\dfrac{1}{\tan^2 x}$	④ $\dfrac{1 + \tan^2 x}{2}$	⑤ $\dfrac{2}{1 + \tan^2 x}$
⑥ $\dfrac{1 - \tan^2 x}{2}$	⑦ $\dfrac{2}{1 - \tan^2 x}$	⑧ $\dfrac{1 + \tan^2 x}{2\tan x}$
⑨ $\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$	ⓐ $\dfrac{1 - \tan^2 x}{2\tan x}$	ⓑ $\dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(2) ①から，$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ のとき $\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{テ} < \frac{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} < \boxed{ト} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。

$\boxed{テ}$，$\boxed{ト}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3
④ 4	⑤ $\dfrac{1}{2}$	⑥ $\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{1}{4}$

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(3) 花子さんは，表1に載っていない $\tan 89.5°$ の値を，② を用いて調べることにした。

$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = \tan 89°$ を満たす x は

$$x = \frac{\pi}{\boxed{\text{ナニヌ}}}$$

である。

花子さんは，表1を参考にして $\tan 89° = 57.29$ とした。② を用いると $\tan 89.5°$ の値は $\boxed{\text{ネ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

⓪ 30 未満	① 30 以上 40 未満
② 40 以上 50 未満	③ 50 以上 60 未満
④ 60 以上 70 未満	⑤ 70 以上 80 未満
⑥ 80 以上 90 未満	⑦ 90 以上 100 未満
⑧ 100 以上 110 未満	⑨ 110 以上

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ とする。

(1) $f'(x) = \boxed{\text{ア}}\,x^2 - \boxed{\text{イ}}\,x$ であるから，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{ウ}}$ で極大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとり，$x = \boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

$3 \leqq x \leqq 5$ の範囲において，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{キ}}$ で最大値をとり，$x = \boxed{\text{ク}}$ で最小値をとる。また，$1 \leqq x \leqq 3$ の範囲において，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{ケ}}$ で最大値をとり，$x = \boxed{\text{コ}}$ で最小値をとる。

(2) t を実数とし，$t \leqq x \leqq t + 1$ の範囲における $f(x)$ の最大値を $M(t)$，最小値を $m(t)$ とおく。

$M(t) = f(t + 1)$ かつ $m(t) = f(t)$ となるような t の値の範囲は

$$t \leqq \boxed{\text{サシ}}, \quad \boxed{\text{ス}} \leqq t$$

である。また，$M(t) = f(t)$ かつ $m(t) = f(t + 1)$ となるような t の値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{ソ}}$$

であり，このとき $M(t) - m(t) = f(t) - f(t + 1)$ となることに注意すると，

$\boxed{\text{セ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{ソ}}$ の範囲において $M(t) - m(t)$ は $t = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ で最大値をとることがわかる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(3)　$0 \leqq t \leqq 1$ とし，座標平面において２点 $(t,\ f(t))$，$(t,\ 0)$ を結んでできる線分を ℓ_1 とおく。t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，ℓ_1 が通過する部分を図示すると図１の灰色部分となる。ただし，境界(境界線)を含む。なお，図１においては関数 $y = f(x)$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 1$ の部分を実線で表している。

このとき，図１の灰色部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

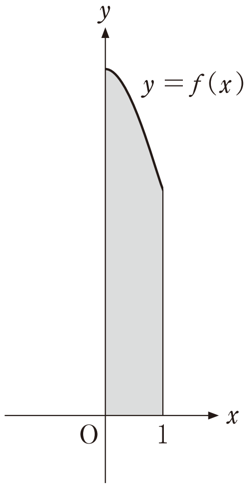

図　1

(数学Ⅱ第２問は次ページに続く。)

(4) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 2$ とし，座標平面において2点$(t,\ f(t))$，$(t,\ g(t))$を結んでできる線分をℓ_2とおく。また，rを実数とし，実数tが$r \leqq t \leqq r+1$の範囲を動くとき，ℓ_2が通過する部分の面積をSとする。

(i) $f(x) - g(x)$の値は，$\boxed{\text{ナ}}$。したがって，すべての実数rに対して，$S = \boxed{\text{ニ}}$が成り立つ。

$\boxed{\text{ナ}}$の解答群

⓪ つねに正である
① つねに負である
② 正になることも，負になることも，0になることもある

$\boxed{\text{ニ}}$の解答群

⓪ $\displaystyle\int_r^{r+1} f(x)\,dx$	① $\displaystyle\int_r^{r+1} g(x)\,dx$
② $\displaystyle\int_r^{r+1} \{-f(x)\}\,dx$	③ $\displaystyle\int_r^{r+1} \{-g(x)\}\,dx$
④ $\displaystyle\int_r^{r+1} \{f(x)-g(x)\}\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_r^{r+1} \{f(x)+g(x)\}\,dx$
⑥ $\displaystyle\int_r^{r+1} \{g(x)-f(x)\}\,dx$	⑦ $\displaystyle\int_r^{r+1} \{-f(x)-g(x)\}\,dx$

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(ii) Sを計算すると

$$S = f(r+1) - f(r) + 4$$

となることがわかるので，rの値が$r =$ セ から$r =$ ソ まで増加するとき，Sの値は ヌ ことがわかる。

ヌ の解答群

⓪ 増加する	① 増加してから減少する
② 減少する	③ 減少してから増加する
④ 一定である	

第３問 （配点　20）

座標平面上に２点 O(０，０)，A(２，４)と点 P がある。

(1)　m を正の実数として，P が

$$\mathrm{OP} : \mathrm{AP} = 1 : m \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を満たすときの P の軌跡について考えよう。

P の座標を$(x,\ y)$とすると

$$\mathrm{OP}^2 = x^2 + y^2$$

$$\mathrm{AP}^2 = \left(x - \boxed{\text{ア}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{イ}}\right)^2$$

である。また，① より

$$\mathrm{AP}^2 - m^2\mathrm{OP}^2 = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が得られる。

（数学Ⅱ第３問は次ページに続く。）

(i) $m = 1$ のとき，P の軌跡は直線

$$y = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}x + \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。この直線は直線 OA と $\boxed{\text{ク}}$。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ 垂直で O を通る	① 平行で点(3，1)を通る
② 垂直で A を通る	③ 平行で点(0，4)を通る
④ 垂直で線分 OA の中点を通る	⑤ 一致する

(ii) $m = \sqrt{2}$ のとき，P の軌跡は円

$$\left(x + \boxed{\text{ケ}}\right)^2 + \left(y + \boxed{\text{コ}}\right)^2 = \boxed{\text{サシ}}$$

である。この円の中心は点$\left(\boxed{\text{スセ}},\ \boxed{\text{ソタ}}\right)$，半径は $\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}$

である。

(数学Ⅱ第３問は次ページに続く。)

(2) k と q を実数の定数として

$$\mathrm{AP}^2 + k\,\mathrm{OP}^2 = q \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

を考える。③において $k = -m^2$, $q = 0$ とすると②が得られる。③を満たすPの軌跡について考えよう。

(i) Pの軌跡が直線になるのは，$k =$ $\boxed{\text{トナ}}$ のときである。この直線と直線OAは $\boxed{\text{ニ}}$。

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

⓪ q の値によらず平行である	① q の値によらず垂直である
② $q > 0$ のときのみ平行である	③ $q > 0$ のときのみ垂直である
④ $q = 0$ のときのみ平行である	⑤ $q = 0$ のときのみ垂直である
⑥ $q < 0$ のときのみ平行である	⑦ $q < 0$ のときのみ垂直である

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(ii) $k = 1$ とする。このとき，P の軌跡が円であるための必要十分条件として，次の⓪～ⓐのうち，正しいものは $\boxed{ヌ}$ である。

$\boxed{ヌ}$ の解答群

⓪ $q > 0$	① $q > 2$	② $q > 5$	③ $q > 10$
④ $q = 0$	⑤ $q = 2$	⑥ $q = 5$	⑦ $q = 10$
⑧ $0 < q < 2$	⑨ $2 < q < 5$	ⓐ $5 < q < 10$	

第４問 （配点　20）

p，q を実数とし，複素数 α を $\alpha = p + qi$ とする。

(1)　$\alpha - p = qi$ が成り立つので，この両辺を２乗することにより，α は

$$\alpha^2 - \boxed{\text{ア}}\,\alpha + \boxed{\text{イ}} = 0$$

を満たすことがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　2	①　$2p$	②　$2q$
③　$(p^2 + q^2)$	④　$(p^2 - q^2)$	⑤　$(q^2 - p^2)$

(2)　x^3 を $x^2 - \boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，$Q(x) = x + \boxed{\text{ウ}}$，$R(x) = \boxed{\text{エ}}\,x - \boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$2p$	①　$2q$	②　$(3p^2 - q^2)$
③　$(p^2 - 3q^2)$	④　$(2p^3 + 2pq^2)$	⑤　$(2p^2q + 2q^3)$

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(3) 太郎さんと花子さんは，α^3 が実数になるとき，p と q が満たす関係式について話している。

太郎：$(p+qi)^3$ を展開すれば，α^3 が実数になるとき，p と q が満たす関係式がわかるね。

花子：(2) の結果を使っても，関係式が求められないかな。

(i) 太郎さんの求め方について考えてみよう。

$\alpha^3 = \boxed{\text{カ}}$ であるから，α^3 が実数になるとき，p と q は $\boxed{\text{キ}} = 0$ を満たすことがわかる。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $p^3 + p^2qi - pq^2 - q^3i$	① $p^3 - p^2qi + pq^2 - q^3i$
② $p^3 + 3p^2q - 3pq^2 - q^3$	③ $p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$
④ $p^3 + 3p^2qi - 3pq^2 - q^3i$	⑤ $p^3 - 3p^2qi + 3pq^2 - q^3i$

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ $p^2q - q^3$	① $-p^2q - q^3$	② $p^3 - 3pq^2$
③ $3p^3 - pq^2$	④ $3p^2q - q^3$	⑤ $-3p^2q - q^3$

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(ii) 花子さんの求め方について考えてみよう。

$P(x) = x^2 - \boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}$ とする。(2)と同じように，x^3 を $P(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，$\alpha^3 = \boxed{\text{ク}}$ であることがわかる。したがって，実数 ℓ，m，n を用いて $Q(x) = x + \ell$，$R(x) = mx + n$ と表すと，α^3 が実数になるとき，$\boxed{\text{ケ}} = 0$ となることがわかる。

このことと(2)より，p と q が満たす関係式は $\boxed{\text{キ}} = 0$ とわかる。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $P(\alpha)$	① $Q(\alpha)$	② $P(\alpha)Q(\alpha)$	③ $R(\alpha)$

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ ℓp	① mp	② np
③ ℓq	④ mq	⑤ nq

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(4)　$(s+t)^4$ を展開すると

$$(s+t)^4 = s^4 + \boxed{\text{コ}}\,s^3t + \boxed{\text{サ}}\,s^2t^2 + \boxed{\text{シ}}\,st^3 + t^4$$

であるから，$\alpha^4 = \boxed{\text{ス}} + \left(\boxed{\text{セ}}\right)i$ であることがわかる。

このことと(3)における花子さんの考え方を用いると，x^4 を $x^2 - \boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}$ で割った余りの x の係数は $\boxed{\text{ソ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $p^4 + 6p^2q^2 + q^4$	① $p^4 - 6p^2q^2 + q^4$	② $p^4 + 6p^2q^2 - q^4$
③ $p^4 + 8p^2q^2 + q^4$	④ $p^4 - 8p^2q^2 + q^4$	⑤ $p^4 + 8p^2q^2 - q^4$

$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $4p^3 - 4pq^2$	① $4p^4 - 4p^2q^2$	② $4p^3q - 4pq^3$
③ $4p^4q - 4p^2q^3$	④ $4p^5 - 4p^3q^2$	⑤ $4p^3q^2 - 4pq^4$