数　学　I

（全　問　必　答）

第1問 （配点　25）

〔1〕　次の等式①と②を同時に満たす実数 x，y について考える。

$$50(x^2+y^2)=(x+7y)^2 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$-4\sqrt{3}\,x+y=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

①の左辺から右辺を引くと

$$50(x^2+y^2)-(x+7y)^2=\left(\boxed{\text{ア}}\,x-y\right)^2$$

となる。よって，①より

$$y=\boxed{\text{ア}}\,x$$

である。したがって

$$x=\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}\sqrt{3}$$

となり，$y=\boxed{\text{ア}}\left(\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}\sqrt{3}\right)$ となる。

（数学 I 第1問は次ページに続く。）

また

$$x^2 + y^2 - 50 = 400\left(\boxed{\text{エオ}} + \boxed{\text{カ}}\sqrt{3}\right)$$

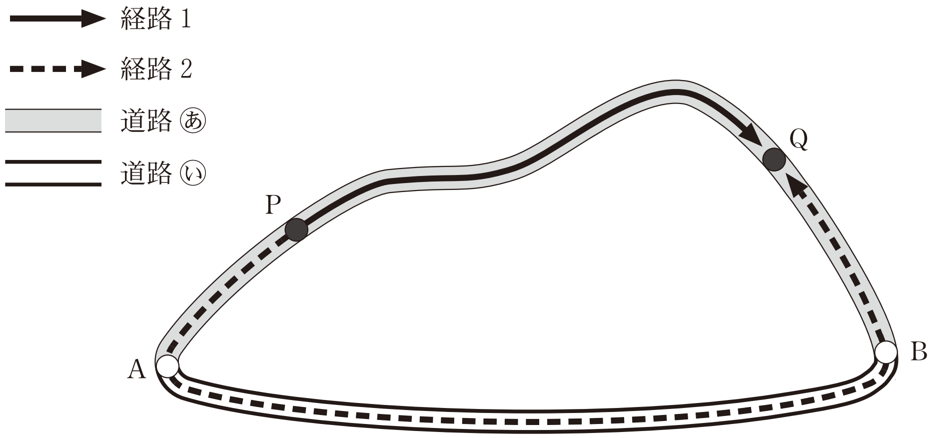
となる。

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

〔2〕 地点Aと地点Bが一般道路㋐(以下，道路㋐)と高速道路㋑(以下，道路㋑)でつながっている。車の制限速度は，道路㋐が時速 30 km で，道路㋑が時速 80 km である。道路㋐におけるAからBまでの道のりは 75 km であり，道路㋑におけるAからBまでの道のりは 48 km である。

道路㋐上に地点Pがあり，道路㋐におけるPからAまでの道のりは 10 km である。また，地点Qは道路㋐においてPとBの間にある。ただし，Qは，P，Bのいずれとも異なる地点である。

太郎さんは，PからQに車で行くことになった。PからQに行くには，Pから道路㋐だけを通ってQに行く経路1と，Pから道路㋐を通ってAに行き，Aから道路㋑を通ってBに行き，Bから道路㋐を通ってQに行く経路2がある。



参考図

道路㋐におけるPからQまでの道のりがどれくらいであれば，経路2を選ぶ方が経路1を選ぶより短い時間でQに到着できるかを考えたい。ただし，車はつねに制限速度で走るものとする。

(数学 I 第1問は次ページに続く。)

道路㋐において，PからQまでの道のりをx kmとすると，PからAまでの道のりが10 kmであり，PとBの間にQがあることから$x < 65$である。

経路2を選ぶとき，道路㋐を通っている時間は$\dfrac{\boxed{\text{キク}}-x}{\boxed{\text{ケコ}}}$時間となるので，経路2を選んだ場合のPからQまでの所要時間は$\left(\dfrac{\boxed{\text{キク}}-x}{\boxed{\text{ケコ}}}+\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right)$時間となる。よって，経路2を選ぶ方が経路1を選ぶより短い時間でQに到着できることを表す不等式は

$$\frac{\boxed{\text{キク}}-x}{\boxed{\text{ケコ}}}+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\ \boxed{\text{ス}}\ \frac{x}{\boxed{\text{セソ}}}$$

となる。これを解くと

$$x > \boxed{\text{タチ}}\,.\,\boxed{\text{ツ}}$$

となる。したがって，道路㋐におけるPからQまでの道のりが$\boxed{\text{タチ}}\,.\,\boxed{\text{ツ}}$ kmより長ければ，経路2を選ぶ方が経路1を選ぶより短い時間でQに到着することができる。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $<$	① $>$

（数学Ⅰ第1問は次ページに続く。）

〔3〕

(1)　Uを全体集合とし，A，B，CをUの部分集合とする。U，A，B，Cの関係を図1のように表すと，例えば，$A \cap (B \cup C)$はAと$B \cup C$の共通部分で，$B \cup C$は図2の斜線部分なので，$A \cap (B \cup C)$は図3の斜線部分となる。

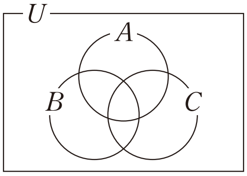


図　1

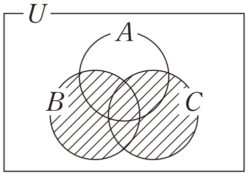


図　2

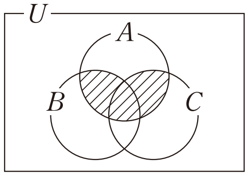
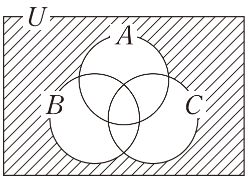


図　3

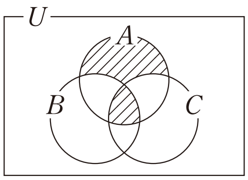
このとき，$\overline{A} \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$は $\boxed{\text{テ}}$ の斜線部分，$A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$は $\boxed{\text{ト}}$ の斜線部分である。

$\boxed{\text{テ}}$，$\boxed{\text{ト}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

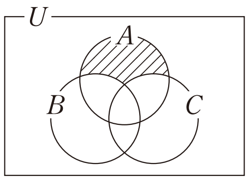
⓪



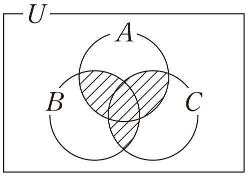
①



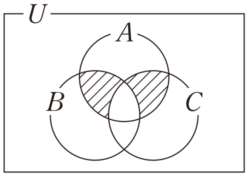
②



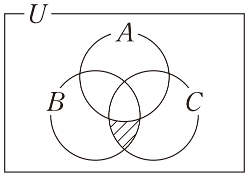
③



④



⑤



（数学Ⅰ第1問は次ページに続く。）

⑵ 全体集合 U を，-5 以上 5 以下の整数全体の集合とする。また，a，b を整数として，次の A，B，C が U の部分集合になっているとする。

$$A=\{0,\ a-3,\ a+3\},\quad B=\{b-2,\ b+3\},\quad C=\{1,2,3,4\}$$

(i) a，b がとり得る値について考える。$A\subset U$ であることから，a がとり得る値は $\boxed{\text{ナニ}}$ 以上 $\boxed{\text{ヌ}}$ 以下の整数である。また，$B\subset U$ であることから，b がとり得る値は $\boxed{\text{ネノ}}$ 以上 $\boxed{\text{ハ}}$ 以下の整数である。

(ii) A，B，C が次の**条件**を満たすとする。

条件

$\overline{A}\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=\{-5,-4,-3,-2\}$ である。

このとき $A\cup(B\cup C)$ の要素を具体的に考え，A の要素と比較すると $a=\boxed{\text{ヒ}}$ がわかる。このことより，さらに B の要素とも比較すると，b のとり得る値は 2 通りであることがわかる。

(iii) A，B，C が (ii) の**条件**を満たすとする。このとき

$A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$ の要素の個数が 1 個であるとすると，$b=\boxed{\text{フ}}$ であり

$A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$ の要素の個数が 2 個であるとすると，$b=\boxed{\text{ヘ}}$ である。

第２問 （配点　25）

〔1〕　負の定数 k に対して

$$\sin\theta\cos\theta = k \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を満たす θ について考えよう。ただし，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。

(1)　① を満たす θ が存在するとする。このとき，θ は $\boxed{\text{ア}}$ であるから，

$\sin\theta$ $\boxed{\text{イ}}$ $\cos\theta$ が成り立つ。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪　鋭　角	①　直　角	②　鈍　角

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪　$<$	①　$=$	②　$>$

（数学Ⅰ第２問は次ページに続く。）

(2) $k=-\dfrac{7}{18}$ のとき，$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。よって

$$\cos\theta=\frac{\boxed{\text{カキ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

が得られる。このことから，$k=-\dfrac{7}{18}$ のとき，① を満たす θ は二つ存在することがわかる。これら二つの θ のうち，小さい方の大きさは $\boxed{\text{コ}}$ である。なお，$\sqrt{2}=1.41\cdots$，$\sqrt{3}=1.73\cdots$ である。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ 0° より大きく 30° 未満	① 30° 以上 45° 未満
② 45° 以上 60° 未満	③ 60° 以上 90° 未満
④ 90° 以上 120° 未満	⑤ 120° 以上 135° 未満
⑥ 135° 以上 150° 未満	⑦ 150° 以上 180° 未満

（数学 I 第 2 問は次ページに続く。）

〔2〕 三角形に関連する量と三角形の合同条件について考察する。

(1) △ABC において，BC = 4 であり，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ であるとする。このとき，∠BAC の大きさについて二つの場合を考えることができ，そのうちの小さい方は $\boxed{\boxed{\text{サ}}}$ であり，大きい方は $\boxed{\boxed{\text{シ}}}$ である。さらに，△ABC の面積は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ であるとする。このとき，AB・AC = $\boxed{\text{ス}}$ である。

∠BAC = $\boxed{\boxed{\text{サ}}}$ のとき，余弦定理より $AB^2 + AC^2 = \boxed{\text{セソ}}$ なので $(AB + AC)^2 = \boxed{\text{タチ}}$ である。よって，AC = $\boxed{\text{ツ}}$ − AB より

$$AB = \frac{\boxed{\text{テ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{2}$$

である。

また，∠BAC = $\boxed{\boxed{\text{シ}}}$ のとき，同様に考えると $AB = \dfrac{\sqrt{19} \pm \sqrt{7}}{2}$ であることがわかる。

$\boxed{\boxed{\text{サ}}}$ ， $\boxed{\boxed{\text{シ}}}$ の解答群

⓪ 30°	① 45°	② 60°	③ 90°
④ 120°	⑤ 135°	⑥ 150°	

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

(2) 次の命題(a)，(b)の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{ニ}}$ である。

(a) 二つの三角形において，一組の辺，面積，外接円の半径がそれぞれ等しいならば，その二つの三角形は合同である。

(b) 二つの三角形において，一組の角，面積，外接円の半径がそれぞれ等しいならば，その二つの三角形は合同である。

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	真	真	偽	偽
(b)	真	偽	真	偽

第３問 （配点　30）

〔１〕 c を定数とする。２次関数

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

のグラフを G とする。また，G を x 軸方向に $4c$，y 軸方向に $c^2 - 8c + 6$ だけ平行移動した放物線を H とする。

(1) $c = -1$ とする。このとき H をグラフにもつ２次関数は

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イウ}}$$

である。

(2) H と x 軸との共有点の個数が２個となるような c の値の範囲は

$$\boxed{\text{エ}} < c < \boxed{\text{オ}}$$

である。

（数学Ⅰ第３問は次ページに続く。）

(3)　$c=4$ とする。このとき H の頂点を P とし，H と x 軸との共有点を A，B とすると

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\textsf{カキ}},\ \boxed{\textsf{クケ}}\right),\quad \mathrm{A}\left(\boxed{\textsf{コサ}},\ 0\right),\quad \mathrm{B}\left(\boxed{\textsf{シス}},\ 0\right)$$

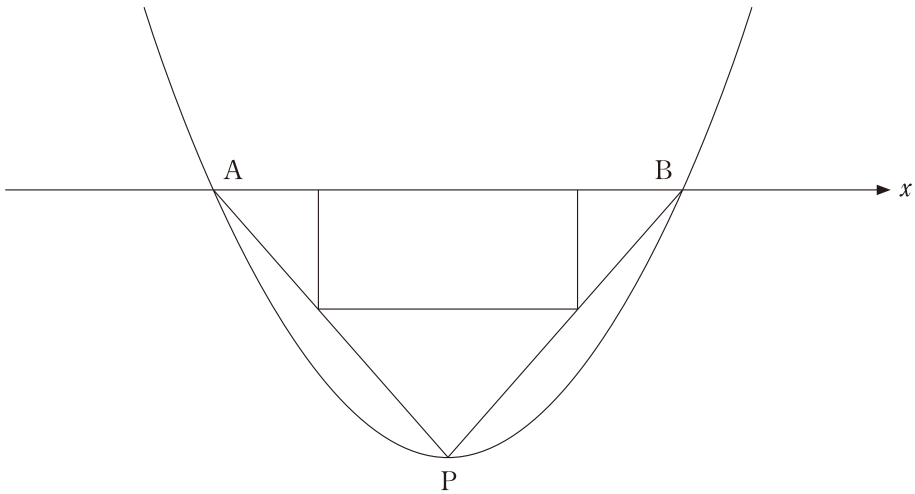
である。ただし，$\boxed{\textsf{コサ}} < \boxed{\textsf{シス}}$ とする。

また，次の**条件**を満たす長方形 S を考える。

条件

- 線分 AB 上に S の辺の一つがある。
- 線分 PA，PB 上に S の頂点が一つずつある。

条件を満たすような S の面積の最大値は $\boxed{\textsf{セソ}}$ である。



参考図

（数学 I 第 3 問は次ページに続く。）

〔2〕 花子さんと太郎さんは，絶対値を含む関数のグラフを考えている。

(1) 関数

$$y = \frac{1}{8}|x^2 + 2x - 8| + \frac{1}{8}(x^2 - 6x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを考える。

(i) 2 次不等式 $x^2 + 2x - 8 < 0$ の解は $\boxed{\text{タチ}} < x < \boxed{\text{ツ}}$ である。

$\boxed{\text{タチ}} < x < \boxed{\text{ツ}}$ のとき，$x^2 + 2x - 8$ の値は負となるので，① は

$$y = -\frac{1}{8}(x^2 + 2x - 8) + \frac{1}{8}(x^2 - 6x) = -x + 1$$

と変形できる。

$x \leqq \boxed{\text{タチ}}$，$\boxed{\text{ツ}} \leqq x$ のとき，① は

$$y = \frac{1}{8}(x^2 + 2x - 8) + \frac{1}{8}(x^2 - 6x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$$

と変形できる。

(ii) 2 次関数

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$$

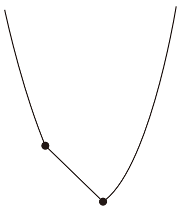
のグラフの頂点の座標は $\left(\boxed{\text{テ}},\ \dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\right)$ である。

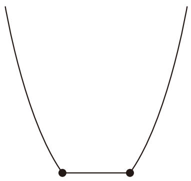
(iii) ① のグラフは $\boxed{\text{ヌ}}$ である。

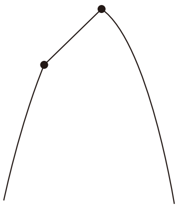
（数学 I 第 3 問は次ページに続く。）

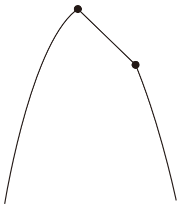
$\boxed{\text{ヌ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑨のうちから一つ選べ。なお，x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である。

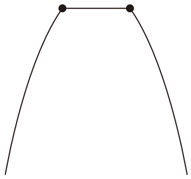
⓪

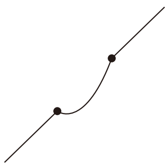

①


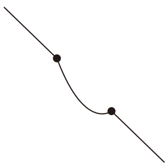
②


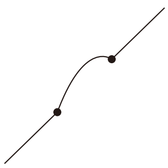
③


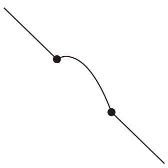
④


⑤


⑥


⑦


⑧


⑨


（数学Ⅰ第３問は次ページに続く。）

⑵　花子さんと太郎さんは，⑴を振り返って，グラフのおおよその形をより簡単に知る手順を，関数

$$y = -\frac{1}{8}|x^2 - 9| - \frac{1}{8}x^2 + x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を例にして考えている。

花子：①の関数のグラフを考えるのは大変だったね。おおよその形でよいから，あまり計算せずに簡単に知ることはできないかな。

太郎：②の関数も①の関数と同じように x^2 の項が消えて1次関数となるような x の値の範囲があるね。具体的には，$x^2 - 9 < 0$ となる x の値の範囲で x の係数が正の1次関数になっているよ。

花子：逆に $x^2 - 9 > 0$ となる x の値の範囲では，x^2 の係数が負の2次関数になっているよ。

太郎：それらを合わせると，②の関数のグラフは，真ん中が右上がりの直線の一部，両側が上に凸の放物線の一部になっているよ。

花子：このように考えていけば，あまり計算をしなくても，おおよその形は簡単にわかるね。

関数 $y = -\frac{1}{8}|x^2 - 9| - \frac{1}{8}x^2 + x$ のグラフは $\boxed{ネ}$ である。

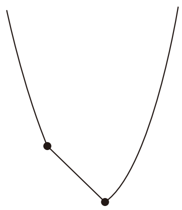
次の関数のグラフについても考えてみよう。

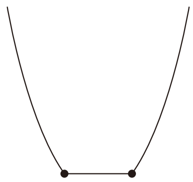
- 関数 $y = \frac{1}{8}|x^2 - 9| - \frac{1}{8}x^2 + x$ のグラフは $\boxed{ノ}$ である。
- 関数 $y = \frac{1}{8}|x^2 + 2\sqrt{5}x - 4| + \frac{1}{8}(x^2 + 2\sqrt{5}x)$ のグラフは $\boxed{ハ}$ である。

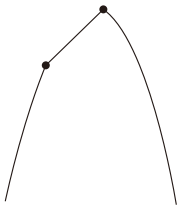
（数学Ⅰ第3問は次ページに続く。）

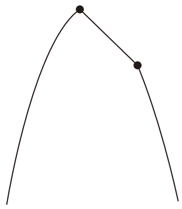
$\boxed{\text{ネ}}$ ～ $\boxed{\text{ハ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。なお，x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である。

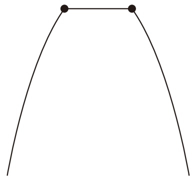
⓪

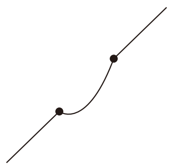

①


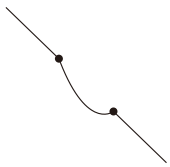
②


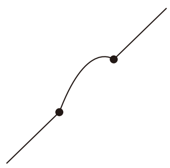
③


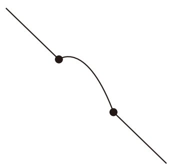
④


⑤


⑥


⑦


⑧


⑨


数学Ⅰ

第４問 （配点　20）

〔1〕 演技などの採点において，複数の審査員による採点結果の評点のうち，最小値と最大値をそれぞれ１個ずつ除外した評点によって評価が行われることがある。

以下では，審査員がそれぞれ $1, 2, 3, 4, 5$ のいずれかの評点をつけるものとする。

n は３以上の自然数とする。n 人の審査員による採点結果の評点を小さい方から順に並べたものを

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$$

と表し，これを「元の評点」と呼ぶこととし，「元の評点」の平均値を $\overline{x}$，分散を s^2 で表す。また，「元の評点」から最小値 x_1 と最大値 x_n を除外した評点を並べたもの

$$x_2, x_3, \cdots\cdots, x_{n-1}$$

を「調整後の評点」と呼ぶこととし，「調整後の評点」の平均値を $\overline{y}$，分散を t^2 で表す。さらに，除外した２個の評点 x_1, x_n の平均値を $\overline{z}$ で表す。

例えば，５人の審査員による採点結果の評点が $2, 5, 3, 3, 2$ であったとする。このとき「元の評点」は $2, 2, 3, 3, 5$ となり，「調整後の評点」は $2, 3, 3$ となる。

(1) $n = 10$ とする。「元の評点」が

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5$$

であったとする。このとき

$\overline{x} = 3$，$\overline{y} = \boxed{\text{ア}}$，$s^2 = 1.2$，$t^2 = \boxed{\text{イ}}.\boxed{\text{ウ}}$ である。

（数学Ⅰ第４問は次ページに続く。）

(2) $n \geqq 5$ とする。

(i) $A = x_1 + x_n$, $B = x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_{n-1}$ とおくと, $\bar{x} = \dfrac{A + B}{n}$ となり,

$\bar{z} = \dfrac{A}{2}$ と $\bar{y} = \dfrac{B}{n-2}$ を用いると

$$\bar{x} = \boxed{\text{エ}}\,\bar{z} + \boxed{\text{オ}}\,\bar{y}$$

と表すことができる。$\bar{x} \leqq \bar{y}$ が成り立つための必要十分条件として，後の⓪～⑤のうち，正しいものは $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\dfrac{1}{2}$	① $\dfrac{1}{n-2}$	② 2	③ $(n-2)$
④ $\dfrac{1}{n}$	⑤ $\dfrac{2}{n}$	⑥ $\dfrac{n-2}{n}$	⑦ $\dfrac{n-1}{n}$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $\bar{z} \leqq \dfrac{n-2}{2}\bar{y}$	① $\bar{z} \geqq \dfrac{n-2}{2}\bar{y}$
② $\bar{z} \leqq \bar{y}$	③ $\bar{z} \geqq \bar{y}$
④ $\bar{z} \leqq \dfrac{n-2}{n-1}\bar{y}$	⑤ $\bar{z} \geqq \dfrac{n-2}{n-1}\bar{y}$

(ii) $n = 5$ のとき,「元の評点」は x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 である。$x_2 = x_3 = x_4 = 3$ であったとき，$\bar{x} \leqq \bar{y}$ となるような (x_1, x_5) の組は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 個ある。

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

〔2〕 変量 x, y の値の組のデータ

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3)$$

をデータ Z と呼ぶことにする。

x と y の共分散を s_{xy} で表す。ただし，共分散とは x の偏差と y の偏差との積の平均値である。したがって，データ Z の x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると，s_{xy} は

$$s_{xy} = \frac{(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + (x_2 - \overline{x})(y_2 - \overline{y}) + (x_3 - \overline{x})(y_3 - \overline{y})}{3}$$

と表せる。

また，a を 0 でない実数とし，データ Z の変量 y の値のそれぞれに a を加えて得られるデータ

$$(x_1,\ y_1 + a),\ (x_2,\ y_2 + a),\ (x_3,\ y_3 + a)$$

とデータ Z を合わせたデータ

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3),\ (x_1,\ y_1 + a),\ (x_2,\ y_2 + a),\ (x_3,\ y_3 + a)$$

をそれぞれ，変量 u, v の値の組のデータ

$$(u_1,\ v_1),\ (u_2,\ v_2),\ (u_3,\ v_3),\ (u_4,\ v_4),\ (u_5,\ v_5),\ (u_6,\ v_6)$$

とおく。これをデータ Z' と呼ぶことにする。

(1) データ Z' の共分散を s_{uv} と表す。s_{uv} と s_{xy} の関係について考えよう。

まず，データ Z' の u，v の平均値をそれぞれ $\overline{u}$，$\overline{v}$ とすると

$$\overline{u} = \overline{x},\ \overline{v} = \overline{y} + \boxed{\text{ク}}$$

が成り立つ。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

次に，s_{uv} を求めるために

$$\begin{aligned}&(u_4-\overline{u})(v_4-\overline{v})+(u_5-\overline{u})(v_5-\overline{v})+(u_6-\overline{u})(v_6-\overline{v})\\=\ &(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+(x_3-\overline{x})(y_3-\overline{y})\\&+\left(a-\boxed{\text{ク}}\right)\{(x_1-\overline{x})+(x_2-\overline{x})+(x_3-\overline{x})\}\end{aligned}$$

とできることに着目すると

$$s_{uv}=\boxed{\text{ケ}}$$

となることがわかる。

ク の解答群

⓪ $\frac{a}{6}$	① $\frac{a}{3}$	② $\frac{a}{2}$	③ a
④ $2a$	⑤ $3a$	⑥ $6a$	

ケ の解答群

⓪ s_{xy}	① $s_{xy}+a$	② $s_{xy}-a$	③ $s_{xy}+\frac{3}{2}a$
④ $s_{xy}-\frac{3}{2}a$	⑤ $2s_{xy}$	⑥ $\frac{1}{2}s_{xy}$	

(2) データ Z の x と y の相関係数を r，データ Z' の u と v の相関係数を r' とする。r と r' の関係として，次の⓪～⑤のうち，正しいものは $\boxed{\text{コ}}$ と $\boxed{\text{サ}}$ である。ただし，r と r' は計算できるものとする。

コ ， サ の解答群(解答の順序は問わない。)

⓪ $r>0$ ならば $r'>0$	① $r>0$ ならば $r'=0$
② $r>0$ ならば $r'<0$	③ $r=0$ ならば $r'>0$
④ $r=0$ ならば $r'=0$	⑤ $r=0$ ならば $r'<0$