

数 学 II

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 30)

[1]

(1) $k > 0$, $k \neq 1$ とする。関数 $y = \log_k x$ と $y = \log_2 kx$ のグラフについて考えよう。

(i) $y = \log_3 x$ のグラフは点 $(27, \boxed{\text{ア}})$ を通る。また, $y = \log_2 \frac{x}{5}$ のグラフは点 $(\boxed{\text{イウ}}, 1)$ を通る。

(ii) $y = \log_k x$ のグラフは, k の値によらず定点 $(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}})$ を通る。

(iii) $k = 2, 3, 4$ のとき

$y = \log_k x$ のグラフの概形は $\boxed{\text{カ}}$

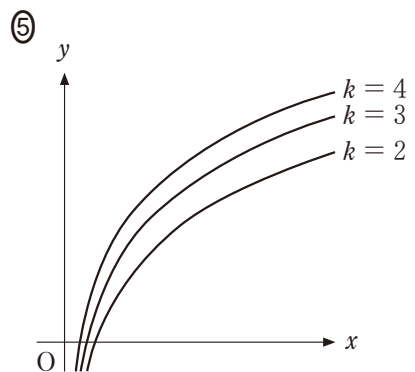
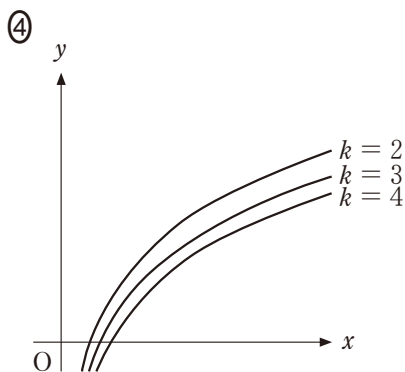
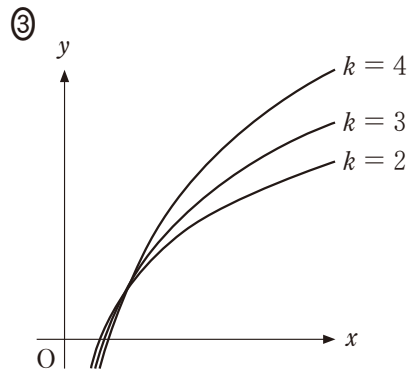
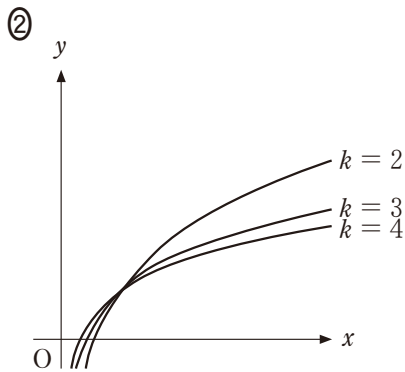
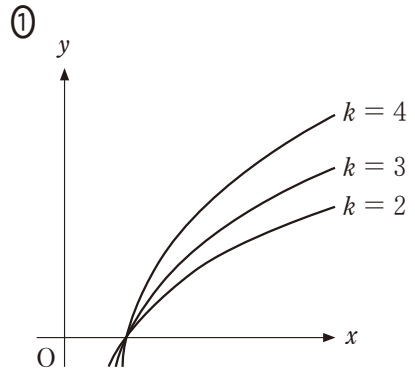
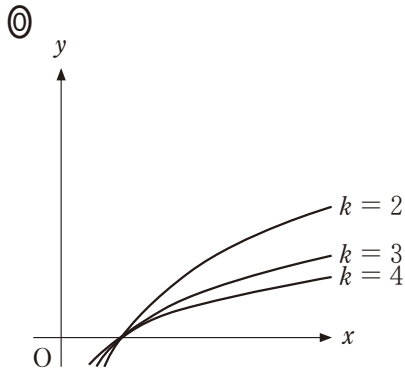
$y = \log_2 kx$ のグラフの概形は $\boxed{\text{キ}}$

である。

(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

数学 II

カ， キ については，最も適当なものを，次の①～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。



(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

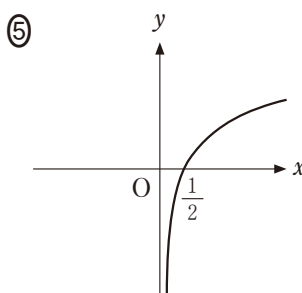
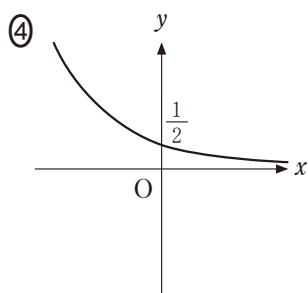
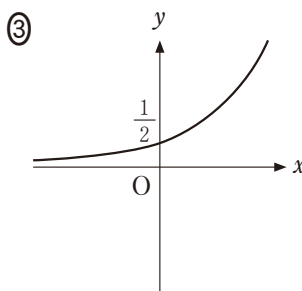
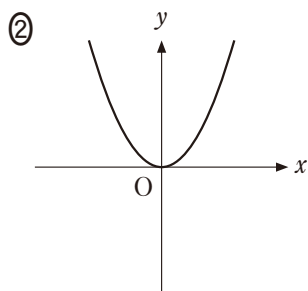
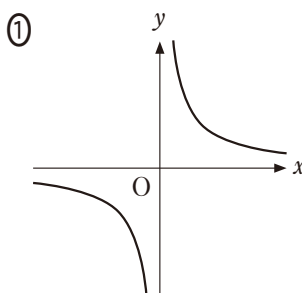
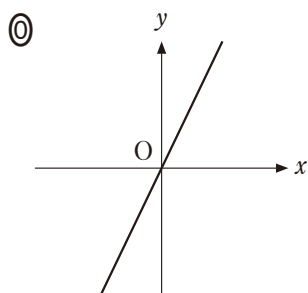
数学Ⅱ

(2) $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$ とする。 $\log_x y$ について考えよう。

(i) 座標平面において、方程式 $\log_x y = 2$ の表す図形を図示すると、

ク の $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$ の部分となる。

ク については、最も適当なものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

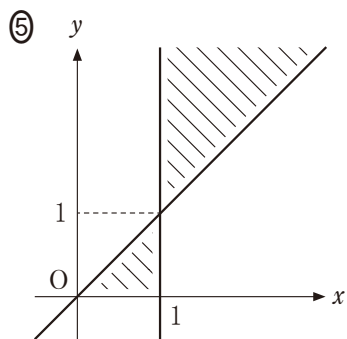
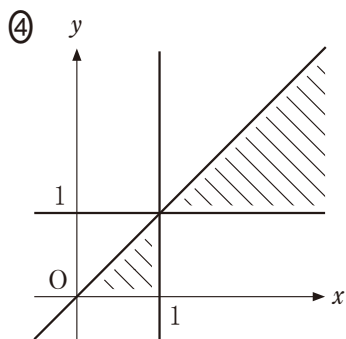
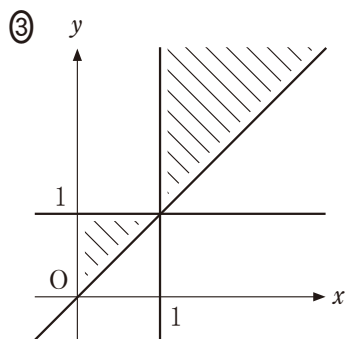
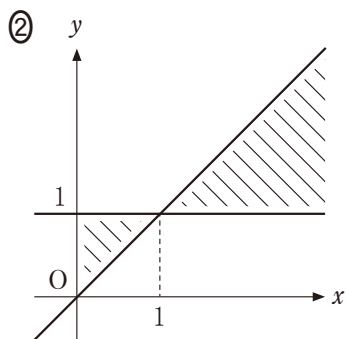
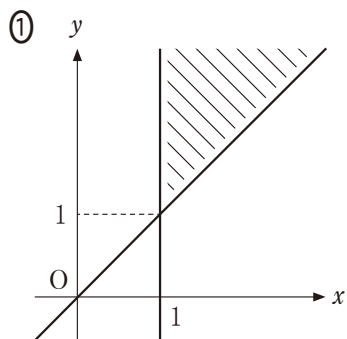
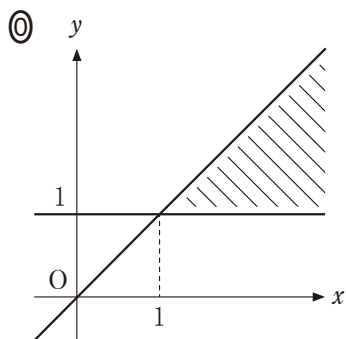


(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(ii) 座標平面において、不等式 $0 < \log_x y < 1$ の表す領域を図示すると、

ケ の斜線部分となる。ただし、境界(境界線)は含まない。

ケ については、最も適当なものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。



(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

[2] $S(x)$ を x の2次式とする。 x の整式 $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$ ，余りを $U(x)$ とする。ただし， $S(x)$ と $P(x)$ の係数は実数であるとする。

(1) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 5$ ， $S(x) = x^2 + 4x + 7$ の場合を考える。

方程式 $S(x) = 0$ の解は $x = \boxed{\text{コサ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{シ}}}i$ である。

また， $T(x) = \boxed{\text{ス}}x - \boxed{\text{セ}}$ ， $U(x) = \boxed{\text{ソタ}}$ である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(2) 方程式 $S(x) = 0$ は異なる二つの解 α, β をもつとする。このとき

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になる

ことと同値な条件を考える。

(i) 余りが定数になるときを考えてみよう。

仮定から、定数 k を用いて $U(x) = k$ とおける。このとき、チ。

したがって、余りが定数になるとき、ツ が成り立つ。

チ については、最も適当なものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① $P(\alpha) = P(\beta) = k$ が成り立つことから、 $P(x) = S(x)T(x) + k$ となることが導かれる。また、 $P(\alpha) = P(\beta) = k$ が成り立つことから、 $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ となることが導かれる
- ② $P(x) = S(x)T(x) + k$ かつ $P(\alpha) = P(\beta) = k$ が成り立つことから、 $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ となることが導かれる
- ③ $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから、 $P(x) = S(x)T(x) + k$ となることが導かれる。また、 $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから、 $P(\alpha) = P(\beta) = k$ となることが導かれる
- ④ $P(x) = S(x)T(x) + k$ かつ $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから、 $P(\alpha) = P(\beta) = k$ となることが導かれる

ツ の解答群

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| ① $T(\alpha) = T(\beta)$ | ① $P(\alpha) = P(\beta)$ |
| ② $T(\alpha) \neq T(\beta)$ | ③ $P(\alpha) \neq P(\beta)$ |

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(ii) 逆に ツ が成り立つとき、余りが定数になるかを調べよう。

$S(x)$ が 2 次式であるから、 m, n を定数として $U(x) = mx + n$ とおける。 $P(x)$ を $S(x), T(x), m, n$ を用いて表すと、 $P(x) =$ テ となる。この等式の x に α, β をそれぞれ代入すると ト となるので、 ツ と $\alpha \neq \beta$ より ナ となる。以上から余りが定数になることがわかる。

テ の解答群

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> ① $(mx + n)S(x)T(x)$ | <input type="checkbox"/> ② $S(x)T(x) + mx + n$ |
| <input type="checkbox"/> ③ $(mx + n)S(x) + T(x)$ | <input type="checkbox"/> ④ $(mx + n)T(x) + S(x)$ |

ト の解答群

- | |
|--|
| <input type="checkbox"/> ① $P(\alpha) = T(\alpha)$ かつ $P(\beta) = T(\beta)$ |
| <input type="checkbox"/> ② $P(\alpha) = m\alpha + n$ かつ $P(\beta) = m\beta + n$ |
| <input type="checkbox"/> ③ $P(\alpha) = (m\alpha + n)T(\alpha)$ かつ $P(\beta) = (m\beta + n)T(\beta)$ |
| <input type="checkbox"/> ④ $P(\alpha) = P(\beta) = 0$ |
| <input type="checkbox"/> ⑤ $P(\alpha) \neq 0$ かつ $P(\beta) \neq 0$ |

ナ の解答群

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> ① $m \neq 0$ | <input type="checkbox"/> ② $m \neq 0$ かつ $n = 0$ |
| <input type="checkbox"/> ③ $m \neq 0$ かつ $n \neq 0$ | <input type="checkbox"/> ④ $m = 0$ |
| <input type="checkbox"/> ⑤ $m = n = 0$ | <input type="checkbox"/> ⑥ $m = 0$ かつ $n \neq 0$ |
| <input type="checkbox"/> ⑦ $n = 0$ | <input type="checkbox"/> ⑧ $n \neq 0$ |

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(i), (ii)の考察から, 方程式 $S(x) = 0$ が異なる二つの解 α, β をもつとき, $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $\boxed{\text{ツ}}$ であることは同値である。

- (3) p を定数とし, $P(x) = x^{10} - 2x^9 - px^2 - 5x$, $S(x) = x^2 - x - 2$ の場合を考える。 $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき, $p = \boxed{\text{ニヌ}}$ となり, その余りは $\boxed{\text{ネノ}}$ となる。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

m を $m > 1$ を満たす定数とし、 $f(x) = 3(x-1)(x-m)$ とする。また、 $S(x) = \int_0^x f(t) dt$ とする。関数 $y = f(x)$ と $y = S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう。

(1) $m = 2$ のとき、すなわち、 $f(x) = 3(x-1)(x-2)$ のときを考える。

(i) $f'(x) = 0$ となる x の値は $x = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(ii) $S(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x \left(3t^2 - \boxed{\text{ウ}}t + \boxed{\text{エ}} \right) dt \\ &= x^3 - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^2 + \boxed{\text{キ}}x \end{aligned}$$

であるから

$x = \boxed{\text{ク}}$ のとき、 $S(x)$ は極大値 $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ をとり

$x = \boxed{\text{サ}}$ のとき、 $S(x)$ は極小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとることがわかる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

- (iii) $f(3)$ と一致するものとして、次の①～④のうち、正しいものは である。

の解答群

- ① $S(3)$
- ② 2点 $(2, S(2))$, $(4, S(4))$ を通る直線の傾き
- ③ 2点 $(0, 0)$, $(3, S(3))$ を通る直線の傾き
- ④ 関数 $y = S(x)$ のグラフ上の点 $(3, S(3))$ における接線の傾き
- ⑤ 関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(3, f(3))$ における接線の傾き

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(2) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 、 $1 \leq x \leq m$ の範囲で、関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき、 $S_1 = \boxed{\text{セ}}$ 、 $S_2 = \boxed{\text{ソ}}$ である。

$S_1 = S_2$ となるのは $\boxed{\text{タ}} = 0$ のときであるから、 $S_1 = S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{チ}}$ である。また、 $S_1 > S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y = S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

$\boxed{\text{セ}}$ 、 $\boxed{\text{ソ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| ㉐ $\int_0^1 f(x) dx$ | ㉑ $\int_0^m f(x) dx$ | ㉒ $\int_1^m f(x) dx$ |
| ㉓ $\int_0^1 \{-f(x)\} dx$ | ㉔ $\int_0^m \{-f(x)\} dx$ | ㉕ $\int_1^m \{-f(x)\} dx$ |

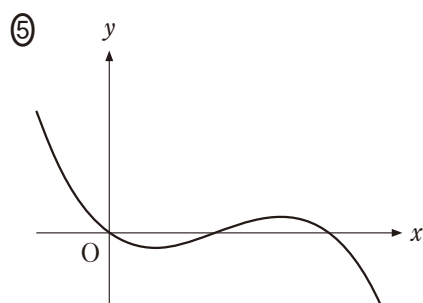
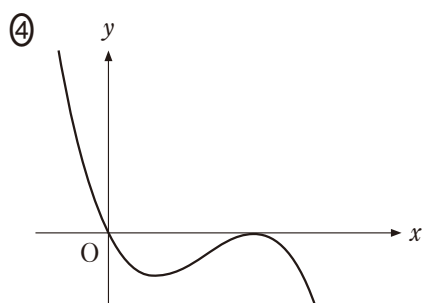
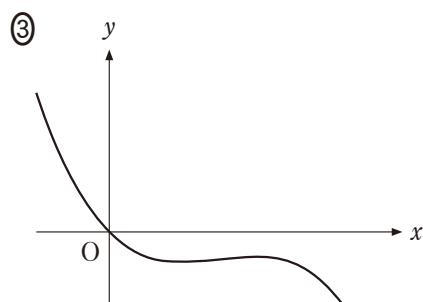
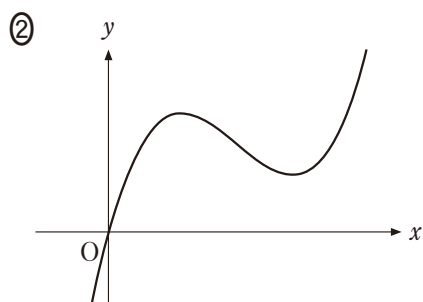
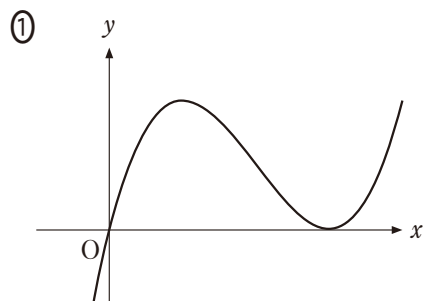
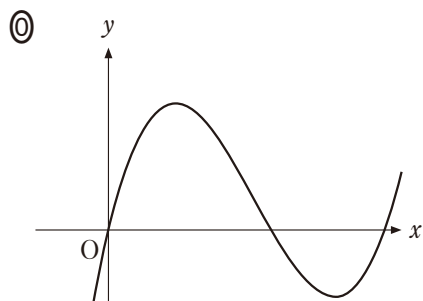
$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

- | | |
|---|---|
| ㉖ $\int_0^1 f(x) dx$ | ㉗ $\int_0^m f(x) dx$ |
| ㉘ $\int_1^m f(x) dx$ | ㉙ $\int_0^1 f(x) dx - \int_0^m f(x) dx$ |
| ㉚ $\int_0^1 f(x) dx - \int_1^m f(x) dx$ | ㉛ $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^m f(x) dx$ |
| ㉜ $\int_0^m f(x) dx + \int_1^m f(x) dx$ | |

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

チ， ツ については，最も適当なものを，次の①～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。



(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

- (3) 関数 $y = f(x)$ のグラフの特徴から関数 $y = S(x)$ のグラフの特徴を考えてみよう。

関数 $y = f(x)$ のグラフは直線 $x = \boxed{\text{テ}}$ に関して対称であるから、すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^1 f(x) dx = \int_m^{\boxed{\text{ト}}} f(x) dx \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

が成り立ち、 $M = \boxed{\text{チ}}$ とおくと $0 < q \leq M - 1$ であるすべての実数 q に対して

$$\int_{M-q}^M \{-f(x)\} dx = \int_M^{\boxed{\text{ナ}}} \{-f(x)\} dx \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

が成り立つことがわかる。すべての実数 a, β に対して

$$\int_a^\beta f(x) dx = S(\beta) - S(a)$$

が成り立つことに注意すれば、①と②はそれぞれ

$$S(1-p) + S(\boxed{\text{ト}}) = \boxed{\text{ニ}}$$

$$2S(M) = \boxed{\text{ヌ}}$$

となる。

以上から、すべての正の実数 p に対して、2点 $(1-p, S(1-p))$, $(\boxed{\text{ト}}, S(\boxed{\text{ト}}))$ を結ぶ線分の中点についての記述として、後の④～⑤のうち、最も適当なものは $\boxed{\text{ネ}}$ である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

テ の解答群

- ① m ② $\frac{m}{2}$ ③ $m + 1$ ④ $\frac{m + 1}{2}$

ト の解答群

- ① $1 - p$ ② p ③ $1 + p$
 ④ $m - p$ ⑤ $m + p$

ナ の解答群

- ① $M - q$ ② M ③ $M + q$
 ④ $M + m - q$ ⑤ $M + m$ ⑥ $M + m + q$

ニ の解答群

- ① $S(1) + S(m)$ ② $S(1) + S(p)$ ③ $S(1) - S(m)$
 ④ $S(1) - S(p)$ ⑤ $S(p) - S(m)$ ⑥ $S(m) - S(p)$

ヌ の解答群

- ① $S(M - q) + S(M + m - q)$ ② $S(M - q) + S(M + m)$
 ③ $S(M - q) + S(M)$ ④ $2S(M - q)$
 ⑤ $S(M + q) + S(M - q)$ ⑥ $S(M + m + q) + S(M - q)$

ネ の解答群

- ① x 座標は p の値によらず一つに定まり, y 座標は p の値により変わる。
 ② x 座標は p の値により変わり, y 座標は p の値によらず一つに定まる。
 ③ 中点は p の値によらず一つに定まり, 関数 $y = S(x)$ のグラフ上にある。
 ④ 中点は p の値によらず一つに定まり, 関数 $y = f(x)$ のグラフ上にある。
 ⑤ 中点は p の値によって動くが, つねに関数 $y = S(x)$ のグラフ上にある。
 ⑥ 中点は p の値によって動くが, つねに関数 $y = f(x)$ のグラフ上にある。

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

- (1) $\cos x = 0$ を満たす x は、 $0 \leq x < 2\pi$ の範囲に二つある。そのうち、値が小さい方は $x = \boxed{\text{ア}}$ であり、大きい方は $x = \boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

㉔	0	㉑	$\frac{\pi}{6}$	㉒	$\frac{\pi}{3}$	㉓	$\frac{\pi}{2}$
㉕	$\frac{2}{3}\pi$	㉖	$\frac{5}{6}\pi$	㉗	π	㉘	$\frac{7}{6}\pi$
㉙	$\frac{4}{3}\pi$	㉚	$\frac{3}{2}\pi$	㉛	$\frac{5}{3}\pi$	㉜	$\frac{11}{6}\pi$

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(2)

(i) $0 \leq x < 2\pi$ のとき, 方程式

$$\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0 \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

を考える。

三角関数の加法定理により

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \boxed{\text{ウ}}$$

$$\cos x = \cos(2x - x) = \boxed{\text{エ}}$$

が成り立つ。これらを用いると

$$\cos 3x + \cos 2x + \cos x = (\boxed{\text{オ}} + 1) \cos 2x \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

が得られる。

②により, ①は $\boxed{\text{カ}}$ 個の解をもつことがわかる。そのうち, 最も小さい

解は $x = \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}$ であり, 2 番目に小さい解は $x = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \pi$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| ① $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$ | ① $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$ |
| ② $-\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$ | ③ $-\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$ |
| ④ $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$ | ⑤ $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$ |
| ⑥ $-\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$ | ⑦ $-\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$ |

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

- | | | | |
|--------------|---------------|--------------|---------------|
| ① $\sin x$ | ① $-\sin x$ | ② $\cos x$ | ③ $-\cos x$ |
| ④ $2 \sin x$ | ⑤ $-2 \sin x$ | ⑥ $2 \cos x$ | ⑦ $-2 \cos x$ |

(数学 II 第 3 問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(ii) n を 3 以上の自然数とする。 $0 \leq x < 2\pi$ のとき、方程式

$$\cos(n+1)x + \cos nx + \cos(n-1)x = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

を考える。

(i) と同じように考えると、 $\textcircled{3}$ のすべての解を求めることができる。そのうち、最も小さい解は $x = \boxed{\text{コ}}$ であり、2 番目に小さい解は $x = \boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{\text{コ}}$, $\boxed{\text{サ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\textcircled{0}$ 0 | $\textcircled{1}$ $\frac{\pi}{6}$ | $\textcircled{2}$ $\frac{\pi}{4}$ | $\textcircled{3}$ $\frac{\pi}{3}$ |
| $\textcircled{4}$ $\frac{\pi}{2}$ | $\textcircled{5}$ $\frac{2}{3}\pi$ | $\textcircled{6}$ $\frac{\pi}{n}$ | $\textcircled{7}$ $\frac{2}{n}\pi$ |
| $\textcircled{8}$ $\frac{3}{n}\pi$ | $\textcircled{9}$ $\frac{\pi}{2n}$ | \textcircled{a} $\frac{3}{2n}\pi$ | \textcircled{b} $\frac{5}{2n}\pi$ |

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

座標平面において、方程式 $x^2 + y^2 = 4$ が表す円を C_1 、 $x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$ が表す円を C_2 とする。

必要に応じて、次のことを用いてもよい。

点と直線の距離

点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離を d とするとき

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となる。

- (1) C_2 の中心は点 $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ 、半径は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(2) C_1 と C_2 の両方に接する直線の方程式を求める方法について考えよう。

次の方針に基づいて考える。

方針

C_1 の接線のうち、 C_2 にも接するものを求める。

C_1 上の点 $P(p, q)$ をとり、 P における C_1 の接線を l とする。 P は C_1 上にあるので

$$p^2 + q^2 = 4$$

が成り立つ。

(i) l の方程式を求めよう。

$p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ の場合を考える。原点 $(0, 0)$ と P を結ぶ直線を m とすると、 l と m は垂直である。 m の傾きは **エ** であるので、 l の傾きは **オ** となる。よって、 l の方程式は **カ** となる。

$p = 0$ または $q = 0$ の場合も、**カ** の表す直線は、 P における C_1 の接線となることがわかる。

エ， **オ** の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | | |
|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| ① p | ② q | ③ $-p$ | ④ $-q$ |
| ⑤ $\frac{1}{p}$ | ⑥ $\frac{1}{q}$ | ⑦ $-\frac{1}{p}$ | ⑧ $-\frac{1}{q}$ |
| ⑨ $\frac{q}{p}$ | ⑩ $\frac{p}{q}$ | ⑪ $-\frac{q}{p}$ | ⑫ $-\frac{p}{q}$ |

カ の解答群

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① $px + qy = 2$ | ② $px - qy = 2$ | ③ $qx + py = 2$ |
| ④ $qx - py = 2$ | ⑤ $px + qy = 4$ | ⑥ $px - qy = 4$ |
| ⑦ $qx + py = 4$ | ⑧ $qx - py = 4$ | |

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

(ii) l が C_2 に接するのは、キ ときである。

キ の解答群

- ① l が x 軸に平行である
- ② l が y 軸に平行である
- ③ l が C_2 の中心を通る
- ④ C_2 の中心と l の距離が、 C_1 の半径に等しい
- ⑤ C_2 の中心と l の距離が、 C_2 の半径に等しい

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(iii) (i), (ii)での考察から、次のことがわかる。

l が C_2 に接するときの P の座標は

$$(p, q) = \left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}, \frac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}} \right), \quad \left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}, -\frac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}} \right),$$

$$\left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}, \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}} \right), \quad \left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}, -\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}} \right)$$

である。ただし、 $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} < \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ とする。よって、これらの p, q の組

を $\boxed{\text{カ}}$ に代入すれば、 C_1 と C_2 の両方に接する直線の方程式が得られる。