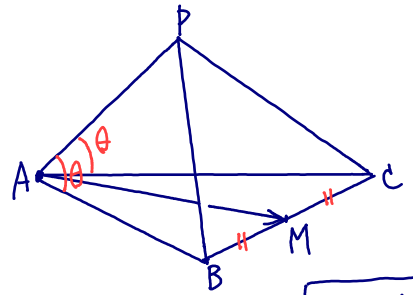
第5問　（選択問題）（配点　20）

三角錐(すい) PABC において，辺 BC の中点を M とおく。また，∠PAB = ∠PAC とし，この角度を θ とおく。ただし，$0° < \theta < 90°$ とする。



(1)　$\overrightarrow{AM}$ は

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{AC}$$

(2点)

点Mは線分BCの中点より $\overrightarrow{AM} = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ アイ ウエ

と表せる。また

$$\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}|\,|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AP}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \boxed{1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(2点)

である。

$$\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|} = \boxed{\cos\theta} \cdots ①$$

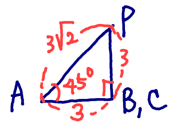
①オ

内積の定義

$\boxed{オ}$ の解答群

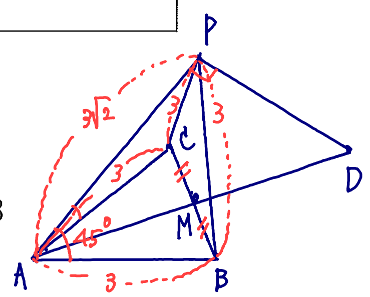
⓪ $\sin\theta$	① $\cos\theta$	② $\tan\theta$
③ $\dfrac{1}{\sin\theta}$	④ $\dfrac{1}{\cos\theta}$	⑤ $\dfrac{1}{\tan\theta}$
⑥ $\sin\angle BPC$	⑦ $\cos\angle BPC$	⑧ $\tan\angle BPC$

B



(2)　$\theta = 45°$ とし，さらに

$$|\overrightarrow{AP}| = 3\sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{PB}| = 3, \quad |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{PC}| = 3$$



が成り立つ場合を考える。このとき

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC} = \boxed{9}$$

(2点)

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos 45°$

$= 3\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \boxed{9}$ カ

である。さらに，直線 AM 上の点 D が ∠APD = 90° を満たしているとする。このとき，$\overrightarrow{AD} = \boxed{2}\,\overrightarrow{AM}$ である。

(3点)

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

点Dは直線AM上より実数 α を用いて

$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AM}$

$= \frac{\alpha}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

と表せる。

$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})\cdot\overrightarrow{AP}$

$= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP} - |\overrightarrow{AP}|^2$

$= \frac{\alpha}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}) - |\overrightarrow{AP}|^2$

$= \frac{\alpha}{2}(9+9) - (3\sqrt{2})^2$

$= 9\alpha - 18$

∠APD = 90° のとき $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AP} = 0$ であるから

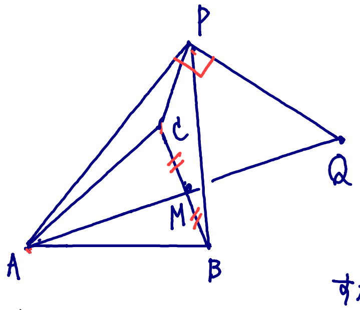
$9\alpha - 18 = 0$

$\therefore \alpha = 2$

よって $\overrightarrow{AD} = \boxed{2}\overrightarrow{AM}$ キ

(3)

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \boxed{\ 2\ }\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}$



$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}})$

$= -\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$

すなわち $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}}$ ⓪ク

で定まる点を Q とおく。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直である三角錐 PABC はどのようなものかについて考えよう。例えば(2)の場合では，点 Q は点 D と一致し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は垂直である。

①から

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta + |\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$

両辺を $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ で割って $\boxed{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}$ ③ケ

(i) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表して考えると，$\boxed{\ 0\ }$ が成り立つ。さらに①に注意すると，$\boxed{}$ から $\boxed{\ 3\ }$ が成り立つことがわかる。

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ (3点)

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ (2点)

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であれば，$\boxed{}$ が成り立つ。逆に，$\boxed{}$ が成り立てば，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は垂直である。

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

① $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

② $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

③ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

④ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$

⑤ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{2}\,|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$

① $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2\,|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$

② $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\sin\theta + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

③ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta + |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

④ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\sin\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = 2\,|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

⑤ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta = 2\,|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(ii)　k を正の実数とし

$$k\,\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$$

①から $k|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

両辺を $|\overrightarrow{AP}|\cos\theta\ (>0)$ でわって

$\boxed{k|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|}$ ⓪」 …②

$k|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$

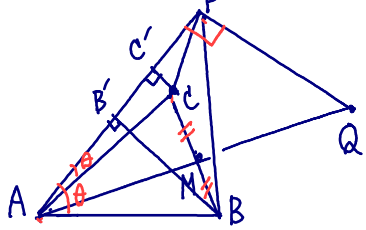
が成り立つとする。このとき，$\boxed{0}$ が成り立つ。(2点)

また，点 B から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点を B′ とし，同様に点 C から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点を C′ とする。

B′とC′が線分APをそれぞれ1:kとk:1に内分する点

このとき，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であることは，$\boxed{4}$ であることと同値である。(3点) 特に $k = 1$ のとき，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であることは，$\boxed{2}$ であること と同値である。(1点)

△PABと△PACがそれぞれBP=BA, CP=CAを満たす二等辺三角形



(i)より $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|\cos\theta + |\overrightarrow{AC}|\cos\theta = |\overrightarrow{AP}|$ …③

ここで △ABB′に着目して $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = AB'$

②から $|\overrightarrow{AC}|\cos\theta = k|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = k\,AB'$

このことから③は $(k+1)AB' = AP$ …④

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $k\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert$	① $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = k\lvert\overrightarrow{AC}\rvert$
② $k\lvert\overrightarrow{AP}\rvert = \sqrt{2}\,\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	③ $k\lvert\overrightarrow{AP}\rvert = \sqrt{2}\,\lvert\overrightarrow{AC}\rvert$

同様にして $|AC|\cos\theta = AC'$

②から $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = \frac{1}{k}|\overrightarrow{AC}|\cos\theta = \frac{1}{k}AC'$

③は $\left(\frac{1}{k}+1\right)AC' = AP$

∴ $(k+1)AC' = kAP$ …⑤

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ B′ と C′ がともに線分 AP の中点

① B′ と C′ が線分 AP をそれぞれ $(k+1):1$ と $1:(k+1)$ に内分する点

② B′ と C′ が線分 AP をそれぞれ $1:(k+1)$ と $(k+1):1$ に内分する点

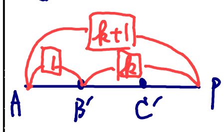
③ B′ と C′ が線分 AP をそれぞれ $k:1$ と $1:k$ に内分する点

④ B′ と C′ が線分 AP をそれぞれ $1:k$ と $k:1$ に内分する点

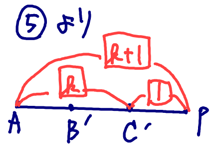
⑤ B′ と C′ がともに線分 AP を $k:1$ に内分する点

⑥ B′ と C′ がともに線分 AP を $1:k$ に内分する点

④より



⑤より

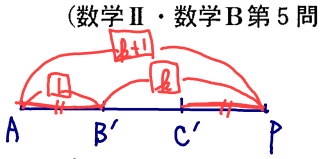


よって $\boxed{4}$ サ

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

補　③から $AB' + AC' = AP$

これより $AB' = C'P$



このことから⑤がなくても $AC':C'P = k:1$ はわかる

シ の解答群

⓪ △PAB と △PAC がともに正三角形 ← 反例は(2)

① △PAB と △PAC がそれぞれ ∠PBA = 90°，∠PCA = 90° を満たす直角二等辺三角形

② △PAB と △PAC がそれぞれ BP = BA，CP = CA を満たす二等辺三角形

③ △PAB と △PAC が合同

④ AP = BC

とくに $k=1$ とすると

B′, C′ はともに線分APを1:1に内分するので

B′とC′はともに線分APの中点で一致する.

$BB' \perp AP$, $CC' \perp AP$ であるから

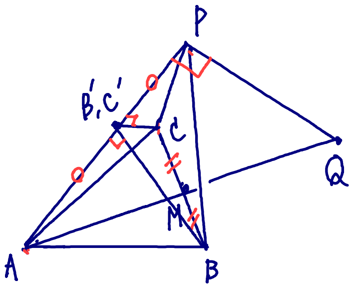
$BP=BA$, $CP=CA$

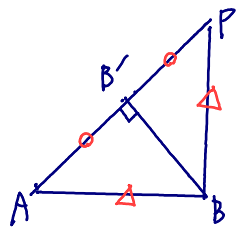
逆にこのとき $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PQ}$ は成り立つ

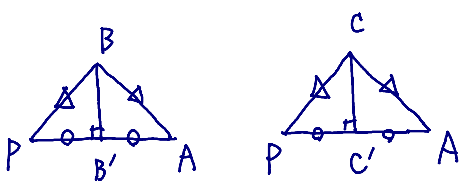
よって $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PQ}$ であることは $\boxed{②}$ と同値

シ

$\left(\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow ②\right)$







補

②から $AB=AC$ であるから

△PAB ≡ △PAC

となるので

$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PQ} \Rightarrow$ △PAB ≡ △PAC

は成り立つ. しかし逆の

△PAB ≡ △PAC $\Rightarrow \overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PQ}$

は成り立たない

= 等辺三角形ではない合同

反例