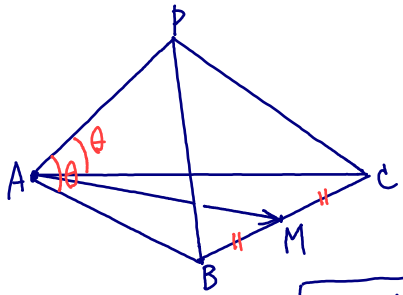
## 数学Ⅱ・数学B　第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

# 第５問　（選択問題）（配点　20）

三角錐（すい）PABC において，辺 BC の中点を M とおく。また，∠PAB ＝ ∠PAC とし，この角度を $\theta$ とおく。ただし，$0° < \theta < 90°$ とする。




(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

（２点）

点Mは線分BCの中点より　$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$
ア　イ　ウ　エ

と表せる。また

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \boxed{①} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

（２点）

である。

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \boxed{\cos\theta} \cdots ①$$

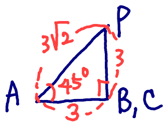
①オ

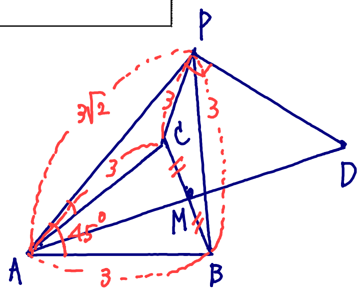
$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪　$\sin\theta$ | ①　$\cos\theta$ | ②　$\tan\theta$ |
| ③　$\dfrac{1}{\sin\theta}$ | ④　$\dfrac{1}{\cos\theta}$ | ⑤　$\dfrac{1}{\tan\theta}$ |
| ⑥　$\sin\angle\mathrm{BPC}$ | ⑦　$\cos\angle\mathrm{BPC}$ | ⑧　$\tan\angle\mathrm{BPC}$ |

B

(2)　$\theta = 45°$ とし，さらに




$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = 3\sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 3, \quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PC}}| = 3$$

が成り立つ場合を考える。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{9}$$

（２点）

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos45°$
$= 3\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$
$= \boxed{9}$ カ

である。さらに，直線 AM 上の点 D が ∠APD ＝ 90° を満たしているとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boxed{2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ である。

（３点）

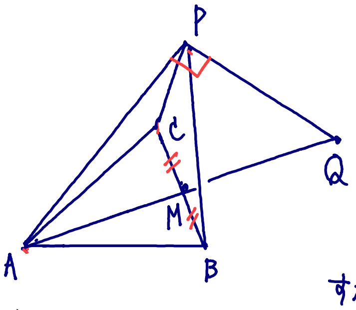
（数学Ⅱ・数学B第５問は次ページに続く。）

点Dは直線AM上より実数αを用いて
$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AM}}$
$= \frac{\alpha}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})$
と表せる。

$\overrightarrow{\mathrm{PD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$
$= \overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} - |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$
$= \frac{\alpha}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}) - |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$
$= \frac{\alpha}{2}(9 + 9) - (3\sqrt{2})^2$
$= 9\alpha - 18$

$\angle\mathrm{APD} = 90°$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{PD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ であるから
$9\alpha - 18 = 0$
$\therefore\ \alpha = 2$
よって　$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boxed{2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$
キ

(3)




$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PQ}$ のとき $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP})$

$= -\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

すなわち $\boxed{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP}}$ ⓪ク

$$\overrightarrow{AQ} = \boxed{2}\ \overrightarrow{AM}$$

で定まる点を Q とおく。$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直である三角錐 PABC はどのようなものかについて考えよう。例えば(2)の場合では，点 Q は点 D と一致し，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ は垂直である。

①から

$|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta + |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta = |\overrightarrow{AP}|^2$

両辺を $|\overrightarrow{AP}|$ でわって

$\boxed{|\overrightarrow{AB}|\cos\theta + |\overrightarrow{AC}|\cos\theta = |\overrightarrow{AP}|}$ ③ケ

(i) $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}$ を用いて表して考えると，$\boxed{\ ⓪\ }$ が成り立つ。さらに ① に注意すると，$\boxed{\phantom{ケ}}$ から $\boxed{\ ③\ }$ が成り立つことがわかる。

$|\overrightarrow{AB}|\cos\theta + |\overrightarrow{AC}|\cos\theta = |\overrightarrow{AP}|$

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP}$ (3点)

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP}$ (2点)

したがって，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であれば，$\boxed{\phantom{ケ}}$ が成り立つ。逆に，$\boxed{\phantom{ケ}}$ が成り立てば，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ は垂直である。

$|\overrightarrow{AB}|\cos\theta + |\overrightarrow{AC}|\cos\theta = |\overrightarrow{AP}|$

$|\overrightarrow{AB}|\cos\theta + |\overrightarrow{AC}|\cos\theta = |\overrightarrow{AP}|$

$\boxed{ク}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ | $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP}$ |
| ① | $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP}$ |
| ② | $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ |
| ③ | $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ |
| ④ | $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ |
| ⑤ | $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ |

$\boxed{ケ}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ | $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert + \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{2}\,\lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ |
| ① | $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert + \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = 2\,\lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ |
| ② | $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \sin\theta + \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \sin\theta = \lvert\overrightarrow{AP}\rvert$ |
| ③ | $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cos\theta + \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \cos\theta = \lvert\overrightarrow{AP}\rvert$ |
| ④ | $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \sin\theta = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \sin\theta = 2\,\lvert\overrightarrow{AP}\rvert$ |
| ⑤ | $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cos\theta = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \cos\theta = 2\,\lvert\overrightarrow{AP}\rvert$ |

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

①から $k|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

両辺を $|\overrightarrow{AP}|\cos\theta\ (>0)$ でわって

$\boxed{k|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|}$ ⓪コ …②

(ii) $k$ を正の実数とし

$$k\,\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$k|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$

が成り立つとする。このとき，$\boxed{\text{⓪}}$ が成り立つ。

(2点)

また，点 B から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点を B′ とし，同様に点 C から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点を C′ とする。

B′とC′が線分APをそれぞれ1:$k$と$k$:1に内分する点

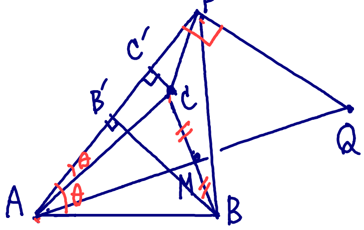
このとき，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であることは，$\boxed{\text{④}}$ であることと同値である。

(3点)

△PABと△PACがそれぞれ BP=BA, CP=CA を満たす二等辺三角形

特に $k=1$ のとき，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であることは，$\boxed{\text{②}}$ であることと同値である。

(1点)




(i)より $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|\cos\theta + |\overrightarrow{AC}|\cos\theta = |\overrightarrow{AP}|$ …③

ここで △ABB′に着目して $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = AB'$

②から $|\overrightarrow{AC}|\cos\theta = k|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = kAB'$

このことから③は $(k+1)AB' = AP$ …④

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ $k\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert$ | ① $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = k\lvert\overrightarrow{AC}\rvert$ |
| ② $k\lvert\overrightarrow{AP}\rvert = \sqrt{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ | ③ $k\lvert\overrightarrow{AP}\rvert = \sqrt{2}\lvert\overrightarrow{AC}\rvert$ |

同様にして

$|AC|\cos\theta = AC'$

②から

$|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = \frac{1}{k}|\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

$= \frac{1}{k}AC'$

③は $\left(\frac{1}{k}+1\right)AC' = AP$

$\therefore (k+1)AC' = kAP$ …⑤

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ B′ と C′ がともに線分 AP の中点

① B′ と C′ が線分 AP をそれぞれ $(k+1):1$ と $1:(k+1)$ に内分する点

② B′ と C′ が線分 AP をそれぞれ $1:(k+1)$ と $(k+1):1$ に内分する点

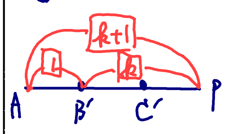
③ B′ と C′ が線分 AP をそれぞれ $k:1$ と $1:k$ に内分する点

④ B′ と C′ が線分 AP をそれぞれ $1:k$ と $k:1$ に内分する点

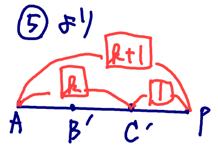
⑤ B′ と C′ がともに線分 AP を $k:1$ に内分する点

⑥ B′ と C′ がともに線分 AP を $1:k$ に内分する点

④より




⑤より




よって $\boxed{\text{④}}$ サ

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

補 ③から $AB'+AC'=AP$

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ △PAB と △PAC がともに正三角形

① △PAB と △PAC がそれぞれ ∠PBA = 90°，∠PCA = 90° を満たす直角二等辺三角形

② △PAB と △PAC がそれぞれ BP = BA，CP = CA を満たす二等辺三角形

③ △PAB と △PAC が合同

④ AP = BC

とくに $k=1$ とすると

B′, C′ はともに線分 AP を 1:1 に内分するので

B′ と C′ はともに線分 AP の中点で一致する.

BB′⊥AP, CC′⊥AP であるから

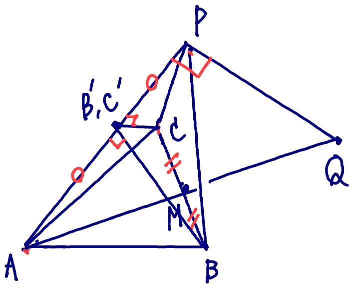
BP = BA，CP = CA

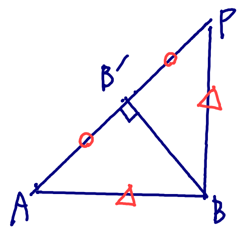
逆にこのとき $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PQ}$ は成り立つ

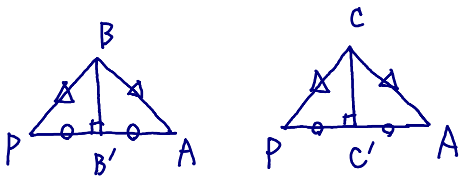
よって $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PQ}$ であることは $\boxed{②}$ と同値

シ

($\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow$ ②)




補

② から AB = AC であるから

△PAB ≡ △PAB

となるので

$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PQ} \Rightarrow$ △PAB ≡ △PAC

は成り立つ. しかし逆の

△PAB ≡ △PAC $\Rightarrow \overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PQ}$

は成り立たない

反例