

数学 I 数と式「実数と1次不等式」

～高校数学のまとめ～

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています。

何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません。

人によっては不要な部分もあるでしょう。そういうときは読み飛ばしてください。

© ささきまこむ

不等式

数量の間の大小関係を

不等号 $>$, $<$, \geq , \leq

だいなり しょうなり だいなりイコール しょうなりイコール

を使って表した式を **不等式** という。

不等号の左側の部分を左辺, 右側の部分を右辺といい 合わせて両辺という。

- ⑨ 不等式 $a > b$ は「 a は b より大きい」, 「 b は a より小さい」, 「 b は a 未満」という。
 不等式 $a \geq b$ は「 $a = b$ または $a > b$ 」を意味し「 a は b 以上」, 「 b は a 以下」という。

実数の基本性質

2つの実数 a , b について

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b$$

のうち, どれか1つの関係だけが成り立つ。

- ⑩ 実数とは大雑把な説明だが, 数直線上に存在できる数のこと。
 実数は大小関係がある。

実数の大小関係と差

2つの実数 a , b について, 次のことが成り立つ。

① $a > b \iff a - b > 0$

② $a = b \iff a - b = 0$

③ $a < b \iff a - b < 0$

- ⑪ \iff は「同値」を表す記号。
 ① 大きい数から小さい数を引くと正になる。
 ② 同じ数を引くと0になる。
 ③ 小さい数から大きい数を引くと負になる。

実数の大小関係の基本性質

3つの実数 a, b, c について、次のことが成り立つ.

① $a > b$ かつ $b > c \implies a > c$

② $a > b \implies a + c > b + c$

③ $a > b \implies a - c > b - c$

④ $a > b$ かつ $c > 0 \implies ac > bc$

⑤ $a > b$ かつ $c > 0 \implies \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

⑥ $a > b$ かつ $c < 0 \implies ac < bc$

⑦ $a > b$ かつ $c < 0 \implies \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

⑩ \implies は「ならば」を表す記号.

⑪ ① $x > 3$ かつ $3 > y \implies x > y$

② $x > y$ の両辺に 2 を加えて $x + 2 > y + 2$

③ $x > y$ の両辺から 2 を引いて $x - 2 > y - 2$

④ $x > y$ の両辺に 2 をかけて $2x > 2y$

⑤ $x > y$ の両辺を 2 で割って $\frac{x}{2} > \frac{y}{2}$

⑥ $x > y$ の両辺に (-2) をかけて $-2x < -2y$

⑦ $x > y$ の両辺を (-2) で割って $-\frac{x}{2} < -\frac{y}{2}$

⑫ 不等式があるとき、両辺に負の数をかけたり、両辺を負の数で割ると不等号の向きが逆になる.

不等式の解

x の満たすべき条件を表した不等式を x についての不等式 という.

x についての不等式を成り立たせる x の値をその不等式の^{かい}解 という.

不等式のすべての解を求めることを、その不等式を^と解く という.

1次不等式の変形

□, △ を実数とし □ ≠ 0 とする.

$$\square x > \triangle \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

について

① □ > 0 のとき

①の両辺を □ で割って $x > \frac{\triangle}{\square}$

② □ < 0 のとき

①の両辺を □ で割って $x < \frac{\triangle}{\square}$

例 ① $3x > 5$ の両辺を 3 で割って $x > \frac{5}{3}$

② $-3x > 5$ の両辺を -3 で割って $x < \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$

1次不等式

a, b を実数とし a ≠ 0 とする.

$$ax + b > 0, \quad ax + b < 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b \leq 0$$

のような不等式を x についての1次不等式という.

とくに $ax + b > 0$ を解くと, 解は

$$\begin{cases} x > -\frac{b}{a} & (a > 0) \\ x < -\frac{b}{a} & (a < 0) \end{cases}$$

例 ① 1次不等式 $3x - 5 > 0$ と解くと, 解は $x > \frac{5}{3}$

例 ② 1次不等式 $-3x - 5 > 0$ と解くと, 解は $x < -\frac{5}{3}$

例 ③ $3x - 5 \geq -2x + 1$ を解く.

両辺に $2x + 5$ を加えて $3x + 2x \geq 1 + 5$

整理して $5x \geq 6$

両辺を 5 で割って $x \geq \frac{6}{5}$

連立不等式

いくつかの不等式を組み合わせたものを^{れんりつふとうしき}連立不等式という。
 それらの不等式を同時に成り立たせる x の範囲を求めることを
 連立不等式を解くという。

3つの数の大小関係と連立不等式

不等式 $A < B < C$ は

$$A < B \text{ かつ } B < C \iff \begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$$

① 不等式 $3x - 5 \leq 2x + 1 < 4x + 3$ を解く。

$$\begin{cases} 3x - 5 \leq 2x + 1 & \dots\dots ① \\ 2x + 1 < 4x + 3 & \dots\dots ② \end{cases}$$

① の両辺に $-2x + 5$ を加えて $x \leq 6$ $\dots\dots ①'$

② の両辺に $-2x - 3$ を加えて $-2 < 2x$

両辺を 2 で割って $-1 < x$ $\dots\dots ②'$

よって、①' かつ ②' より $-1 < x \leq 6$

絶対値

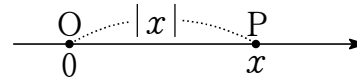
数直線上で原点 $O(0)$ と点 $P(x)$ の距離 OP を

x の ぜったいち絶対値 といひ $|x|$ で表す.

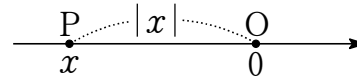
実数 x の絶対値について, 次が成り立つ.

- ① $x = 0$ のとき $|0| = 0$
- ② $x > 0$ のとき $|x| = x$
- ③ $x < 0$ のとき $|x| = -x$

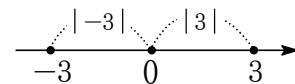
[$x > 0$ のとき]



[$x < 0$ のとき]



- ④ ① 数直線上で点 $O(0)$ と点 $P(0)$ の距離 $OP = |0| = 0$
- ② 数直線上で点 $O(0)$ と点 $P(3)$ の距離 $OP = |3| = 3$
- ③ 数直線上で点 $O(0)$ と点 $P(-3)$ の距離 $OP = |-3| = 3$



絶対値記号をはずす変形

実数 X に対して

$$|X| = \begin{cases} X & (X \geq 0) \\ -X & (X < 0) \end{cases}$$

④ 例 $|3| = 3$

④ 例 $|-3| = -(-3) = 3$

数直線上での2点間の距離

数直線上で点 $A(a)$ と点 $B(b)$ の距離 AB は

$a = b$ のとき $AB = 0$

$a < b$ のとき $AB = b - a$

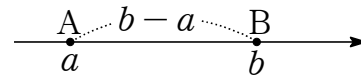
$b < a$ のとき $AB = a - b$

すなわち

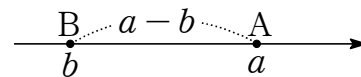
$AB = |b - a|$ または $AB = |a - b|$

と表せる.

[$a < b$ のとき]

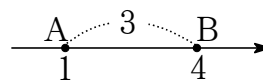


[$b < a$ のとき]



例 2点 $A(1)$, $B(4)$ の距離 AB は

$AB = |4 - 1| = |1 - 4| = 3$



絶対値と不等式

$r > 0$ とするとき

① $|X| = r \iff X = \pm r$

② $|X| < r \iff -r < X < r$

③ $|X| > r \iff x < -X, r < X$

例 ① $|x| = 3 \iff x = \pm 3$

② $|x| < 3 \iff -3 < x < 3$

③ $|x| > 3 \iff x < -3, 3 < x$

絶対値の変形

X, Y を実数とする.

$|X| = |Y| \iff X = Y$ または $X = -Y$

例 $|3| = |3|, |-3| = |-3|, |3| = |-3|, |3| = |-3|$

絶対値の性質

x, y を実数とする.

$$\boxed{1} \quad |x| \geq 0 \quad (\text{等号が成り立つのは } x = 0)$$

$$\boxed{2} \quad |x| \geq x \quad (\text{等号が成り立つのは } x \geq 0)$$

$$\boxed{3} \quad |x| \geq -x \quad (\text{等号が成り立つのは } x = 0)$$

$$\boxed{4} \quad |-x| = |x|$$

$$\boxed{5} \quad |x|^2 = x^2$$

$$\boxed{6} \quad |xy| = |x||y|$$

$$\boxed{7} \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$$

⑩ 補 ① 絶対値の値は 0 以上 (負にはならない)

$$\boxed{2} \quad x \geq 0 \text{ ならば } |x| = x$$

⑩ 例 ① $|3| \geq 0$

$$\boxed{2} \quad |3| \geq 3$$

$$\boxed{3} \quad |3| \geq -3$$

$$\boxed{4} \quad |-3| = |3|$$

$$\boxed{5} \quad |-3|^2 = (-3)^2 = 9$$

$$\boxed{6} \quad |2 \cdot 3| = |2||3|$$

$$\boxed{7} \quad \left| \frac{2}{3} \right| = \frac{|2|}{|3|}$$

平方根

2乗して a になる数 すなわち $x^2 = a$ となる数 x を a の^{へいほうこん}平方根 という.

① 正の数 a の平方根は正と負の2つあり 正の方を \sqrt{a} , 負の方を $-\sqrt{a}$ で表す.

記号 $\sqrt{\quad}$ を^{こんごう}根号 または ルート (root) という.

② 負の数 a の平方根は実数の範囲には存在しない.

③ 0 の平方根 は 0 だけであり $\sqrt{0} = 0$

⑨ ① 9 の平方根は 3 と -3 の 2 つあり

正の方は $3 = \sqrt{9}$, 負の方は $-3 = -\sqrt{9}$

② -3 の平方根は実数の範囲には存在しない.

$x^2 = -3$ を満たす実数 x はない.

平方数と根号

X を実数とするとき

$$\sqrt{X^2} = |X| = \begin{cases} X & (X \geq 0) \\ -X & (X < 0) \end{cases}$$

⑨ $\sqrt{3^2} = |3| = 3$,

⑨ $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

平方根の性質

$a \geq 0$ とする.

① $\sqrt{a} \geq 0$ (等号が成り立つのは $a = 0$)

② $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$

⑩ ① 平方根の値は 0 以上

⑨ ② $(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

平方根の積と商

$a > 0, b > 0, k$ を実数とする.

$$\text{① } \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\text{② } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\text{③ } \sqrt{k^2a} = |k|\sqrt{a}$$

例 ① $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

② $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

③ $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

分母の有理化

分数式において

分母に根号を含む式を分母に根号を含まない式に変形することを

分母を^{ゆうりか}有理化するという.

基本的な分母の有理化

$a > 0, b > 0, a \neq b$ とする.

$$\text{① } \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\text{② } \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

$$\text{③ } \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

例 ① $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

② $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$

③ $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}$

2 重根号

$a > 0, b > 0, a \neq b$ とする.

$$\boxed{1} \quad \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\boxed{2} \quad \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}|$$
$$= \begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} & (a > b) \\ \sqrt{b} - \sqrt{a} & (b > a) \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{例}} \quad \boxed{1} \quad \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\boxed{2} \quad \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

実数の性質

実数は小数で表すことができる.

① $3 = 3.000\dots$, $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{1}{7} = 0.142357\dots$, $\sqrt{2} = 1.4142\dots$, $7 = 7.000\dots$, $\pi = 3.141\dots$

小数の表記

x を実数とするとき

$$x = a.b_1b_2b_3\dots \quad (a \text{ は整数, } b_1, b_2, b_3, \dots \text{ は } 0 \text{ 以上の } 9 \text{ 以下の整数})$$

の形で表せる.

このとき $b_1b_2b_3\dots$ を x の しょうすうてん い か 小数点以下 という.

また

b_1 を x の小数第 1 位 または $\frac{1}{10}$ の位 という.

b_2 を x の小数第 2 位 または $\frac{1}{10^2}$ の位 という.

b_3 を x の小数第 3 位 または $\frac{1}{10^3}$ の位 という.

⋮

① $\pi = 3.14\dots$ について $14\dots$ を π の小数点以下 という.
小数第 1 位は 1, 小数第 2 位は 4 である.

小数の分類

- ① 小数第何位かで終わる小数を ゆうげんしょうすう 有限小数 という.
- ② 小数部分が無限に続く小数を むげんしょうすう 無限小数 という.
- ③ 無限小数のうち
いくつかの数字の配列が繰り返される小数を じゅんかんしょうすう 循環小数 という.

- ④ ① 0.321 は有限小数
- ② $\pi = 3, 14\dots$ は無限小数
- ③ 0.212121\dots は循環小数

循環小数の表記

循環小数は繰り返しの最初と最後の数の上に点をつけて書き表わす.

$$\begin{aligned} \text{つまり } x &= a.\underbrace{b_1b_2\dots b_n}_{\text{繰り返しの最初}}\underbrace{b_1b_2\dots b_n}_{\text{繰り返しの最後}}\underbrace{b_1b_2\dots b_n}_{\text{繰り返しの最初}}\dots \\ &= a.\dot{b}_1b_2\dots\dot{b}_n \end{aligned}$$

ただし 循環する数が 1 つだけのときは次のように点は 1 つだけでよい.

$$\begin{aligned} x &= a.b_1b_1b_1\dots \\ &= a.\dot{b}_1 \end{aligned}$$

④ $0.563563563\dots = 0.\dot{5}6\dot{3}$

④ $0.333\dots = 0.\dot{3}$

小数の分数表記

a は整数, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ は 0 以上 9 以下の整数とする.

① 有限小数のとき

実数 x が小数第 n 位までの有限小数

$$x = a.b_1b_2 \cdots b_n$$

とすると

$$x = a. \underbrace{b_1b_2 \cdots b_n}_{n \text{ 個}} = \frac{ab_1b_2 \cdots b_n}{\underbrace{100 \cdots 0}_{n \text{ 個}}}$$

② 循環小数のとき

実数 x が小数第 1 位から第 n 位までを繰り返す循環小数

$$x = a.\dot{b}_1b_2 \cdots \dot{b}_n = a.b_1b_2 \cdots b_nb_1b_2 \cdots b_nb_1b_2 \cdots b_nb_1b_2 \cdots b_n \cdots$$

とすると

$$x = a. \underbrace{\dot{b}_1b_2 \cdots \dot{b}_n}_{n \text{ 個}} = \frac{ab_1b_2 \cdots b_n - a}{\underbrace{99 \cdots 9}_{n \text{ 個}}}$$

これは $1 \underbrace{00 \cdots 0}_{n \text{ 個}} x - x$ を計算することで求まる.

例 ① $1.\underline{23} = \frac{123}{\underbrace{100}_{2 \text{ 個}}} = \frac{123}{100}$

② $0.\underline{\dot{2}1} = \frac{21 - 0}{\underbrace{99}_{2 \text{ 個}}} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$

これは $x = 0.\dot{2}1 = 0.0.212121 \cdots$ とおくと

$$100x = 21.2121 \cdots \quad \cdots \text{①}$$

$$x = 0.2121 \cdots \quad \cdots \text{②}$$

① - ② として $99x = 21$

よって $x = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$

自然数と整数

..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

を ^{せいすう}整数 という.

とくに

1, 2, 3, 4, 5, ...

を 正の整数 または ^{しぜんすう}自然数 という.

有理数

0 でない整数 m と整数 n を用いて $\frac{n}{m}$ と表される数を ^{ゆうりすう}有理数 という.

つまり (有理数) = $\frac{(\text{整数})}{(\text{整数})}$

有理数は 整数, 有限小数, 循環小数 のいずれかで表される.

① $\frac{3}{5}$, $0.3 = \frac{3}{10}$, $7 = \frac{7}{1}$, ... は有理数である.

② 0 は有理数である. なぜなら $0 = \frac{0}{1}$ より $\frac{(\text{整数})}{(\text{整数})}$ と表すことができるからである.

無理数

実数のうち有理数でないものを ^{むりすう}無理数 という.

無理数は循環しない無限小数で表される.

① $\sqrt{2} = 1, 4142\dots$, $\sqrt{3} = 1, 73205\dots$, $\pi = 3.141592\dots$ は無理数である.

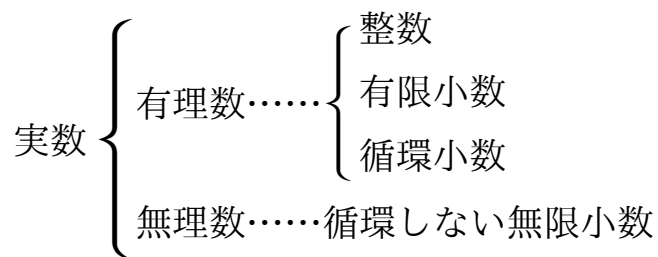
実数

整数と有限小数 または 無限小数で表される数をあわせて ^{じっすう}実数 という。

すなわち 有理数または無理数をあわせて 実数 という。

実数の分類

実数を分類すると次のようになる。



実数の平方の性質

実数の平方は 0 以上である。

つまり $(\text{実数})^2 \geq 0$

この性質から次が成り立つ。

① 実数 a について

$$a^2 \geq 0$$

等号が成り立つのは $a = 0$

② 2 つの実数 a, b について

$$a^2 + b^2 \geq 0$$

等号が成り立つのは $a = 0$ かつ $b = 0$

有理数と実数の四則演算

- ① 2つの有理数の四則演算は有理数である.
- ② 2つの実数の四則演算は実数である.

④ ① 2つの有理数 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ について, 和, 差, 積, 商

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$$

はすべて有理数である.

④ ② 2つの実数の和, 差, 積, 商は必ず実数になる. これを「実数は四則演算に閉じている」という.

ガウス記号

実数 x について x をこえない最大の整数を $[x]$ と表す.

この $[]$ を **ガウス記号** という.

① 例 $[3.14] = 3$

ガウス記号の性質

実数 x について x をこえない最大の整数を $[x]$ と表すとき, 次が成り立つ.

① $[x] \leq x < [x] + 1$ (等号が成り立つのは x が整数)

② $x - 1 < [x] \leq x$ (等号が成り立つのは x が整数)

③ m を整数とすると $[x + m] = [x] + m$

④ 考 ①, ② は定義から明らか.

⑤ 例 ③ $[x + 2] = [x] + 2$

整数部分と小数部分

x を実数とすると

$$\begin{cases} x = m + \alpha \\ m \leq x < m + 1 \text{ (} m \text{ は整数)} \\ 0 \leq \alpha < 1 \end{cases}$$

を満たす m, α がただ 1 つ存在し

m を x の せいすうぶぶん **整数部分**, α を x の しょうすうぶぶん **小数部分** という.

ここで, m は x をこえない最大の整数である.

⑥ 補 $m = [x]$ である.

⑦ 補 x が負の数のときは, 違う定義にすることもある.

⑧ 例 $x = 3.14$ について $x = 3 + 0.14$ であるから整数部分は 3, 小数部分は 0.14

有理数と無理数の関係

p, q, r, s は有理数, α を無理数とする.

$$\boxed{1} \quad p + q\alpha = 0 \iff p = 0 \text{ かつ } q = 0$$

$$\boxed{2} \quad p + q\alpha = r + s\alpha \iff p = r \text{ かつ } q = s$$

④ ① (\implies について)

$$p + q\alpha = 0 \dots\dots\textcircled{1}$$

このとき $q \neq 0$ と仮定すると $\alpha = -\frac{p}{q}$

これは (無理数) = (有理数) であるから矛盾する.

このことから $q = 0$ であり ① から $p = 0$ である.

(\impliedby について)

$$p = 0 \text{ かつ } q = 0 \text{ ならば } p + q\alpha = 0 + 0\alpha = 0$$

$$\boxed{2} \quad p + q\alpha = r + s\alpha \iff p - r + (q - s)\alpha = 0$$

$$\iff p - r = 0 \text{ かつ } q - s = 0$$

($\because p - r, q - s$ は有理数, α は無理数より ①)

$$\iff p = r \text{ かつ } q = s$$

④ 例 a, b を有理数とするとき $a + b\sqrt{2} = 3 + 5\sqrt{2}$ ならば $a = 3, b = 5$