# 数学Ｉ　数と式「1次不等式」

~高校数学のまとめ~

**不等式**

数量の間の大小関係を

不等号 $>$（だいなり）, $<$（しょうなり）, $\geqq$（だいなりイコール）, $\leqq$（しょうなりイコール）

を使って表した式を **不等式**（ふとうしき）という.

不等号の左側の部分を左辺，右側の部分を右辺といい 合わせて両辺という.

補 不等式 $a<b$ は「$b$ は $a$ より大きい」，「$a$ は $b$ より小さい」，「$a$ は $b$ 未満」という.
不等式 $a \leqq b$ は「$a=b$ または $a<b$」を意味し「$b$ は $a$ 以上」，「$a$ は $b$ 以下」という.

例 ある人のテストの点数 $x$ 点が 80 点未満であることは $x<80$ と表せる.

例題 1個 $a$ 円の商品 A を 3 個と，1個 $b$ 円の商品 B を 5 個購入すると，代金は 1000 円以上になる. このとき，金額の間の大小関係を不等式で表せ.

解 $\boldsymbol{3a+5b \geqq 1000}$ あるいは $\boldsymbol{1000 \leqq 3a+5b}$

**不等式の基本性質**

3つの実数 $a$, $b$, $c$ について,

$$a < b \text{ かつ } b < c \quad \text{ならば} \quad a < c$$

㊞ $x < 2$ かつ $2 < y$ ならば $x < y$

**実数の大小関係の基本性質**

3つの実数 $a$, $b$, $c$ について，次のことが成り立つ.

[1] $a < b$ の両辺に $c$ をたして $a + c < b + c$

[2] $a < b$ の両辺から $c$ をひいて $a - c < b - c$

[3] $a < b$ の両辺に $c$ $(c > 0)$ をかけて $ac < bc$

[4] $a < b$ の両辺を $c$ $(c > 0)$ でわって $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

[5] $a < b$ の両辺に $c$ $(c < 0)$ をかけて $ac > bc$

[6] $a < b$ の両辺を $c$ $(c > 0)$ でわって $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

㊞ [1] $2 < 4$ の両辺に 2 をたして $4 < 6$

[2] $2 < 4$ の両辺から 1 をひいて $1 < 3$

[3] $2 < 4$ の両辺に $2(> 0)$ をかけて $4 < 8$

[4] $2 < 4$ の両辺を $2(> 0)$ でわって $1 < 2$

[5] $2 < 4$ の両辺に $-2(< 0)$ をかけて $-4 > -8$

[6] $2 < 4$ の両辺を $-2(< 0)$ でわって $-1 > -2$

㊟ 不等式があるとき，両辺に負の数をかけたり，両辺を負の数で割ると不等号の向きが逆になる.

**例題** $x + 2 < 1$ を満たす $x$ の範囲を不等式で表せ.

㊫ $x + 2 < 1$ の両辺から 2 をひいて $\boldsymbol{x < -1}$

**不等式と解**

$x$ の満たすべき条件を表した不等式を $x$ についての**不等式**という.

$x$ についての不等式を成り立たせる $x$ の値をその不等式の**解**（かい）という.

不等式のすべての解を求めることを，その不等式を**解く**（とく）という.

例 $x$ についての不等式 $x+2<1$ を解くと，解は $x<-1$

**１次不等式**

$a$，$b$ を実数とし $a \neq 0$ とする.

$$ax+b>0,\ ax+b<0,\ ax+b \geqq 0,\ ax+b \leqq 0$$

のように表される不等式を $x$ についての**１次不等式**という.

**１次不等式の変形**

$A$，$B$ を実数とし $A \neq 0$ とする.

$$Ax>B \quad \cdots\cdots①$$

について

$\boxed{1}$ $A>0$ のとき

①の両辺を $A$ でわって $x>\dfrac{B}{A}$

あるいは ①の両辺に $\dfrac{1}{A}$ をかけて $x>\dfrac{B}{A}$

$\boxed{2}$ $A<0$ のとき

①の両辺を $A$ でわって $x<\dfrac{B}{A}$

あるいは ①の両辺に $\dfrac{1}{A}$ をかけて $x<\dfrac{B}{A}$

例 $\boxed{1}$ $3x>5$ の両辺を 3 でわって $x>\dfrac{5}{3}$

$\boxed{2}$ $-3x>5$ の両辺を $-3$ でわって $x<\dfrac{5}{-3}=-\dfrac{5}{3}$

**例題** $x$ の不等式 $3x-5 \geqq -2x+1$ を解け.

解 $3x-5 \geqq -2x+1$ の両辺に $2x+5$ をたして $3x+2x \geqq 1+5$

整理して $5x \geqq 6$

両辺を 5 でわって $\boldsymbol{x \geqq \dfrac{6}{5}}$

## 連立不等式

いくつかの不等式を組み合わせたものを **連立不等式**（れんりつふとうしき）という．

それらの不等式を同時に成り立たせる $x$ の範囲を求めることを

連立不等式を解くという．

㊀ 連立不等式 $\begin{cases} -2 \leqq 2x & \cdots\cdots① \\ 2x < x+5 & \cdots\cdots② \end{cases}$

を解く．

① の両辺を 2 でわって　$-1 \leqq x$　$\cdots\cdots①'$

② の両辺に $-x$ をたして　$x < 5$　$\cdots\cdots②'$

よって，①′ かつ ②′ より　$\boldsymbol{-1 \leqq x < 5}$

## ３つの数の大小関係と連立不等式

不等式 $A < B < C$ は

$$A < B \quad \text{かつ} \quad B < C \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$$

であることと同じである．

㊀ 不等式 $-2 \leqq 2x < x+5$ は

連立不等式 $\begin{cases} -2 \leqq 2x & \cdots\cdots① \\ 2x < x+5 & \cdots\cdots② \end{cases}$

を解くことと同じである．

よって　$\boldsymbol{-1 \leqq x < 5}$

**例題**　不等式 $3x-5 \leqq 2x+1 < 4x+3$ を解け．

㊁ 連立不等式 $\begin{cases} 3x-5 \leqq 2x+1 & \cdots\cdots① \\ 2x+1 < 4x+3 & \cdots\cdots② \end{cases}$

を解くことと同じである．

① の両辺に $-2x+5$ をたして　$x \leqq 6$　$\cdots\cdots①'$

② の両辺に $2x-3$ をたして　$-2 < 2x$

両辺を 2 でわって　$-1 < x$　$\cdots\cdots②'$

よって，①′ かつ ②′ より　$\boldsymbol{-1 < x \leqq 6}$