数学B　数列

~高校数学のまとめ~

数列

数を一列に並べたものを 数列(すうれつ) といい，並べられた各数を数列の 項(こう) という．

数列の項は 最初の項から順に 第1項(だいいちこう)，第2項(だいにこう)，第3項(だいさんこう)，… という．

とくに 最初の項を 初項(しょこう) といい，n 番目の項を 第 n 項(だいエヌこう) という．

有限数列と無限数列

1 項の個数が有限である数列を 有限数列(ゆうげんすうれつ) といい

項の個数を 項数(こうすう)，最後の項を 末項(まっこう) という．

2 項の個数が限りなく続く数列を 無限数列(むげんすうれつ) という．

数列の表記

数列を一般的に表すには

a_1，a_2，a_3，…，a_n，…

のようにかき，この数列を $\{a_n\}$ のように表記することがある．

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を n の式で表し，これを数列 $\{a_n\}$ の 一般項(いっぱんこう) という．

例 2, 4, 6, …, $2n$, … ならば

$a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, …, $a_n=2n$

数列 $\{a_n\}$ の一般項は $2n$

要

数列 $\{a_n\}$ の一般項は定義域が自然数の関数 $f(n)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ と同じ意味

考 $a_1=f(1)$, $a_2=f(2)$, …, $a_n=f(n)$

n を決めると a_n の値が1つ定まる関係である．

等差数列

数列 $\{a_n\}$ において，各項に一定の数 d を加えると次の項が得られるとき

この数列を 等差数列（とうさすうれつ） といい d をその 公差（こうさ） という．

$$a_n \,,\ \xrightarrow[+d]{} a_{n+1}$$

この数列は次の関係式を満たす．

$$a_{n+1}=a_n+d \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1}-a_n=d$$

補 差が等しい数列

等差数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ を初項 $a_1=a$，公差 d の等差数列とするとき

$$a_n=a+d(n-1)$$

$$a_1, \xrightarrow[+d]{} a_2, \xrightarrow[+d]{} a_3, \quad \cdots \quad \xrightarrow[+d]{} a_n$$

つまり

$$(\text{等差数列の第}\,n\,\text{項})=(\text{初項})+(\text{公差})\times(n-1)$$

考 初項 $a_1=a$ に $a_{1\wedge}a_{2\wedge}a_{3\wedge}\cdots{}_{\wedge}a_n$ の間 $_\wedge$ の $(n-1)$ 個の公差 d を加える

考 点 $(1,\,a)$ を通り，傾き d の直線の方程式を求める．

補 $d \fallingdotseq 0$ ならば a_n は n の 1 次式

等差数列の和

等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_n}_{n\,\text{個}}=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

つまり

$$(\text{等差数列の和})=\frac{(\text{項数})}{2}\{(\text{初項})+(\text{末項})\}$$

考 等差数列 $\{a_n\}$ の項数を n，初項を a，末項を ℓ，公差 d とすると

$$S_n=a_1+\quad a_2+\quad a_3+\cdots+a_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+\ell \quad \cdots\cdots ①$$

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1=\ell+(\ell-d)+(\ell-2d)+\cdots+a \quad \cdots\cdots ②$$

① ＋ ② として

$$2S_n=\underbrace{(a+\ell)+(a+\ell)+(a+\ell)+\cdots+(a+\ell)}_{n\,\text{個}}$$

$$=n(a+\ell)$$

よって $S_n=\dfrac{n}{2}(a+\ell)$

☆等差数列の和 2

等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，公差を d として

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{n\text{個}} = \frac{n}{2}\{2a_1 + d(n-1)\}$$

つまり

$$（\text{等差数列の和}）= \frac{（\text{項数}）}{2}\{2 \times（\text{初項}）+（\text{公差}）\times（\text{項数} - 1）\}$$

㊂ $S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

に $a_n = a_1 + d(n-1)$ を代入して

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + d(n-1)\} \\ &= \frac{n}{2}\{2a_1 + d(n-1)\} \end{aligned}$$

㊟ 個人的には使うことがない公式

等比数列

数列 $\{a_n\}$ において，各項に一定の数 r をかけると次の項が得られるとき

この数列を 等比数列（とうひすうれつ） といい r をその 公比（こうひ） という．

この数列は次の関係式を満たす．

$$a_{n+1} = r\,a_n$$

$$a_n \underset{\times r}{\curvearrowright} a_{n+1}$$

等比数列の一般項

数列 $\{a_n\}$ を初項 $a_1 = a$，公比 r の等比数列とするとき

$$a_n = a\,r^{n-1}$$

$$a_1 \underset{\times r}{\curvearrowright} a_2 \underset{\times r}{\curvearrowright} a_3,\ \cdots\ \underset{\times r}{\curvearrowright} a_n$$

つまり

（等比数列の第 n 項）＝（初項）×（公比）$^{n-1}$

㊟ 初項 $a_1 = a$ に $a_{1\wedge}a_{2\wedge}a_{3\wedge}\cdots{}_\wedge a_n$ の間 $_\wedge$ の $(n-1)$ 個の公比 r をかける

等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = \underbrace{a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}}_{n\text{ 個}}$$

$$= \begin{cases} an & (r = 1) \\ \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} & (r \neq 1) \end{cases}$$

つまり（公比）≠ 1 ならば（等比数列の和）＝ $\dfrac{(\text{初項})\left\{1-(\text{公比})^{(\text{項数})}\right\}}{1-(\text{公比})}$

㊟ $r = 1$ のとき $S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n\text{ 個}} = \boldsymbol{an}$

$r \neq 1$ のとき

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad \cdots\cdots①$$

$$rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots\cdots②$$

① − ② として

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

$$= a(1-r^n)$$

$1 - r \neq 0$ であるから $S_n = \boldsymbol{\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}}$

等差中項

a，b，c がこの順で等差数列のとき b を **等差中項**（とうさちゅうこう）といい

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{すなわち} \quad 2b = a + c$$

考 a，b，c がこの順で等差数列のとき，公差を d とすると $a = b - d$，$c = b + d$

$$\frac{a+c}{2} = \frac{(b-d)+(b+d)}{2} = b$$

$$a, \xrightarrow{+d} b, \xrightarrow{+d} c$$

例 2，5，8 はこの順で等差数列で等差中項は 5

補 等差中項は 3 つのデータの平均値，中央値になる．

等比中項

a，b，c はすべて 0 でないとする．

a，b，c がこの順で等比数列のとき b を **等比中項**（とうひちゅうこう）といい

$$b^2 = ac$$

考 a，b，c がこの順で等比数列のとき，公比を $r\ (\neq 0)$ とすると $a = \dfrac{b}{r}$，$c = br$

$$ac = \frac{b}{r} \cdot br = b^2$$

$$a, \xrightarrow{\times r} b, \xrightarrow{\times r} c$$

例 2，6，18 はこの順で等比数列で等比中項は 6

補 $b^2 > 0$ なので $ac > 0$ つまり a と c は同符号である．

定数数列

数列 $\{a_n\}$ において，どの項も n によらない一定の数であるとき

この数列を **定数数列**（ていすうすうれつ）という．

この数列は次の関係式を満たす．

$$a_{n+1} = a_n$$

例 $a_n = 3$ は定数数列

補 公比が 1 の等比数列，公差が 0 の等差数列と考えてもよい．

和の記号 Σ

数列 $\{a_n\}$ の a_p から a_q までの和を

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q$$

とかく.

すなわち $\sum\limits_{k=p}^{q} a_k$ は k を p, $p+1$, $\cdots$, q としたときのすべての a_k の和を表す.

とくに 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

とかく.

㊓ Σ はギリシャ文字で「シグマ」とよむ

Σ の基本性質

Σ は変数の取り方に関係なく同じ和になる.

すなわち

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

㊑ $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} i^2$

Σ の性質

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

$\boxed{3}$ p を k に無関係な定数とするとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}pa_k=p\sum_{k=1}^{n}a_k$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ をまとめて，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ と k に無関係な定数 s，t に対して

$$\sum_{k=1}^{n}(sa_k+tb_k)=s\sum_{k=1}^{n}a_k+t\sum_{k=1}^{n}b_k$$

考 $\boxed{1}$
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

$\boxed{2}$
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)&=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

$\boxed{3}$
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}pa_k&=pa_1+pa_2+\cdots+pa_n\\&=p(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\&=p\sum_{k=1}^{n}a_k\end{aligned}$$

数列の和の公式

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{n\text{ 個}} = cn$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \underbrace{1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}}_{n\text{ 個}} = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1}$　$(r \neq 1)$

考 $\boxed{2}$ 初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和

$\boxed{3}$ $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$

$k = 1, 2, \cdots, n$ として和をとると

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{k^3 - (k-1)^3\right\} = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1)$$

これより　$\displaystyle n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n$

すなわち　$\displaystyle 3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(n-1) + \frac{3n(n+1)}{2}$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\{2(n-1)+3\}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

よって　$\displaystyle \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\boxed{3}$ $k^2 - k = (k-1)k = \dfrac{1}{3}\{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k\}$

$k = 1, 2, \cdots, n$ として和をとると

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k\}$$

すなわち　$\displaystyle \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$

よって　$\displaystyle \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)}{6}\{3 + 2(n-1)\}$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\boxed{4}$ $\boxed{3}$ と同じように示せる.

$\boxed{5}$ 初項 1，公比 r，項数 n の等比数列の和

補 $\boxed{2}$ の和を 2 乗すると $\boxed{4}$ の和になる.

階差と和

差の形を利用して次のように和を求めることができる．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+2}-a_k)=a_{n+2}+a_{n+1}-a_2-a_1$

考 $\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=(\cancel{a_2}-a_1)+(\cancel{a_3}-\cancel{a_2})+(\cancel{a_4}-\cancel{a_3})+\cdots+(a_{n+1}-\cancel{a_n})$

$=a_{n+1}-a_1$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+2}-a_k)=(\cancel{a_3}-a_1)+(\cancel{a_4}-a_2)+(\cancel{a_5}-\cancel{a_3})+\cdots+(a_{n+1}-\cancel{a_{n-1}})+(a_{n+2}-\cancel{a_n})$

$=-a_1-a_2+a_{n+1}+a_{n+2}$

$=a_{n+2}+a_{n+1}-a_2-a_1$

考 対称的に項が残って，和が求まる．

補 $\boxed{1}$ で k を $k-1$ とすると $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$

例 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\displaystyle=1-\frac{1}{n+1}$

$\displaystyle=\frac{n}{n+1}$

☆Σの変換

次のような和は変形できる．

1 p を整数として $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-p} = \sum_{k=1-p}^{n-p} a_k$

2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k$

考 1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-p} = a_{1-p} + a_{2-p} + \cdots + a_{n-1-p} + a_{n-p}$

$\displaystyle = \sum_{k=1-p}^{n-p} a_k$

2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$

$= a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$（たす順番を逆にした）

$\displaystyle = \sum_{k=0}^{n} a_k$

補 1 p だけずらしてたしている

2 たす順番を逆にしている

例 1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2$

2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)^2 = n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 + 0^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2$

一般項が（等差数列）×（等比数列）となる数列の和

$p,\ q,\ a,\ r$ を k に無関係な定数，$p \fallingdotseq 0,\ r \fallingdotseq 1$ とする．

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{(pk+q)\cdot ar^{k-1}\right\}$$

すなわち $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{(\text{等差数列})\times(\text{公比 } r \text{ の等比数列})\right\}$ は

次のように求めることができる．

1. S_n-rS_n を計算する
2. $(pk+q)\cdot ar^{k-1}=f(k)-f(k-1)$ と変形する．

例 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}$ を求める．

1.
$$S_n=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1} \quad \cdots\cdots①$$
$$2S_n=1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n \quad \cdots\cdots②$$

①－② として

$$-S_n=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{1+2+2\cdot 2^2+\cdots+2^{n-1}}-n\cdot 2^n$$
$$=\frac{2^n-1}{2-1}-n\cdot 2^n$$
$$=(1-n)\cdot 2^n-1$$

よって $S_n=\boldsymbol{(n-1)\cdot 2^n+1}$

2. $f(k)=(ak+b)\cdot 2^k$ とおくと

$$k\cdot 2^{k-1}=f(k)-f(k-1)$$
$$=(ak+b)\cdot 2\cdot 2^{k-1}-\left\{a(k-1)+b\right\}\cdot 2^{k-1}$$
$$=(ak+a+b)\cdot 2^{k-1}$$

k の恒等式として $\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \end{cases}$ $\quad\therefore a=1,\ b=-1$

このことから $f(k)=(k-1)\cdot 2^{k-1}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{f(k)-f(k-1)\right\}$$
$$=f(n)-f(0)$$
$$=2^n(n-1)-(-1)$$
$$=\boldsymbol{(n-1)\cdot 2^n+1}$$

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

について

$\boxed{1}$ $n=1$ のとき　$a_1 = S_1$

$\boxed{2}$ $n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

すなわち

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2) \end{cases}$$

考 $\boxed{1}$ $S_1 = a_1$

$\boxed{2}$ $n \geqq 2$ のとき

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad \cdots\cdots ①$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \quad \cdots\cdots ②$$

①－② として　$S_n - S_{n-1} = a_n$

階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う2つの項の差 $a_{n+1}-a_n=b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

を項とする数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の **階差数列**（かいさすうれつ） という.

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする.

つまり

$$a_{n+1}-a_n=b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とすると

$$n \geqq 2 \text{ のとき } a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

考 $n \geqq 2$ のとき
$$\begin{aligned} a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) \\ &= \cancel{a_1}+(\cancel{a_2}-\cancel{a_1})+(\cancel{a_3}-\cancel{a_2})+\cdots+(a_n-\cancel{a_{n-1}}) \\ &= a_n \end{aligned}$$

群数列の解法

群数列(ぐんすうれつ) は 各群の最後（群尾）が第何項であるかを調べる

（最初から項がいくつあるかをチェック）

漸化式

数列において，その前の項から次の項をただ 1 通りに定める規則を示す等式を**漸化式**（ぜんかしき）という．

漸化式を満たす数列の一般項を漸化式の**解**といい，

その解を求めることを漸化式を**解く**という．

とくに 数列 $\{a_n\}$ において

$a_{n+1} = f(a_n)$ となる漸化式を **隣接二項間漸化式**（りんせつにこうかんぜんかしき）という．

$a_{n+2} = F(a_{n+1},\, a_n)$ となる漸化式を **隣接三項間漸化式**（りんせつさんこうかんぜんかしき）という．

定数数列と漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n$$

について，数列 $\{a_n\}$ は定数数列であるから

$$a_n = a$$

㊟補 数列 $\{a_n\}$ は公差が 0 の等差数列，あるいは公比が 1 の等比数列と考えてもよい．
$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ となる．

㊟例 数列 $\{a_n\}$ の漸化式　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を解くと　$a_n = \mathbf{2}$

等差数列と漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d \ (d \text{ は } n \text{ に無関係な定数})$$

$$a_n \ , \ a_{n+1}$$

$$+d$$

について，数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公差 d の等差数列であるから

$$a_n = a + (n-1)d$$

例 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を解くと

$$a_n = 2 + 3(n-1) = \boldsymbol{3n-1}$$

等比数列と漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = r\,a_n \quad (r\text{ は }n\text{ に無関係な定数})$$

$a_n\ ,\ \ a_{n+1}$

$\times r$

について，数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公比 r の等比数列であるから

$$a_n = a\,r^{n-1}$$

例 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 5a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を解くと

$a_n = \boldsymbol{2 \cdot 5^{n-1}}$

等比数列の漸化式の等式変形

数列 $\{A_n\}$ の漸化式

$A_{n+1} = r\,A_n$（r は n に無関係な定数）ただし $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

について，これをくり返して

$$\begin{aligned} A_n &= rA_{n-1} \ (n \geqq 1) \\ &= r^2 A_{n-2} \ (n \geqq 2) \\ &= r^3 A_{n-3} \ (n \geqq 3) \\ &\quad \vdots \\ &= r^{n-3} A_3 \ (n \geqq 3) \\ &= r^{n-2} A_2 \ (n \geqq 2) \\ &= r^{n-1} A_1 \ (n \geqq 1) \\ &= r^n A_0 \ (n \geqq 0) \end{aligned}$$

たしたら n

つまり $A_n = r^{\bigcirc} A_{\square}$ $(\bigcirc + \square = n)$

階差数列と漸化式

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1 = a,\ a_{n+1} - a_n = b_n$$

について，数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから

$$n \geqq 2 \text{ のとき } a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

補 数列 $\{b_n\}$ が定数数列ならば，数列 $\{a_n\}$ は等差数列になる．

例 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n$ を解くと

$n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

これは $n = 1$ のときも成り立つ．

よって $a_n = \mathbf{2^n - 1}$

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ a_{n+1}=pa_n+q \quad (p,\ q \text{ は } n \text{ に無関係な定数})$$

について

$\boxed{1}$ $p=1$ のとき

$$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n+q$$

数列 $\{a_n\}$ は初項 a，公差 q の等差数列であるから

$$a_n=a+(n-1)q$$

$\boxed{2}$ $p\neq 1$ のとき

$$a_{n+1}=pa_n+q \quad \cdots\cdots①$$
$$\alpha=p\alpha+q \quad \cdots\cdots②$$

①－② として $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$　ただし ② から $\alpha=\dfrac{q}{1-p}$

数列 $\{a_n-\alpha\}$ は初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列であるから

$$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$$

よって　$a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$

補 $\boxed{2}$ $\alpha=\dfrac{q}{1-p}$ として変形すると

$$a_{n+1}-\frac{q}{1-p}=p\left(a_n-\frac{q}{1-p}\right)$$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{q}{1-p}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{q}{1-p}=a-\dfrac{q}{1-p}$，公比 p の等比数列であるから

$$a_n-\frac{q}{1-p}=\left(1-\frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$$

よって $a_n=\left(1-\dfrac{q}{1-p}\right)p^{n-1}+\dfrac{q}{1-p}$

例 $\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ の漸化式 $a_1=3,\ a_{n+1}=3a_n-2$ を解くと

$$a_{n+1}=3a_n-2 \quad \cdots\cdots①$$
$$\alpha=3\alpha-2 \quad \cdots\cdots②$$

①－② として $a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$ ただし ② から $\alpha=1$

変形して $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=3-1=2$，公比 3 の等比数列であるから

$$a_n-1=2\cdot 3^{n-1}$$

よって $a_n=\mathbf{2\cdot 3^{n-1}+1}$

★漸化式 $a_{n+1}=pa_n+(n$ の1次式)

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ a_{n+1}=pa_n+qn+r\ \ (p,\ q,\ r \text{ は } n \text{ に無関係な定数},\ q\neq 0)$$

について

1 $p=1$ のとき

$$a_1=a,\ a_{n+1}-a_n=qn+r$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{qn+r\}$ であるから

$n\geqq 2$ のとき $a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}(qk+r)$

2 $p\neq 1$ のとき

$$a_{n+1}=pa_n\quad +qn+r\ \ \cdots\cdots①$$

$$g(n+1)=pg(n)+qn+r\ \ \cdots\cdots②$$

② が n の恒等式となる1次式 $g(n)=\alpha n+\beta$ を求める.

① − ② として $a_{n+1}-g(n+1)=p\{a_n-g(n)\}$

数列 $\{a_n-g(n)\}$ は初項 $a_1-g(1)$, 公比 p の等比数列であるから

$$a_n-g(n)=\{a_1-g(1)\}\cdot p^{n-1}$$

よって $a_n=\{a_1-g(1)\}\cdot p^{n-1}+g(n)$

3 $a_{n+1}=pa_n+qn+r\ \ \cdots\cdots①$

① の n を $n+1$ として

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+q(n+1)+r\ \ \cdots\cdots②$$

② − ① として $a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)+q$

$$a_{n+1}-a_n=b_n\ \ \cdots\cdots③$$

とおくと $b_{n+1}=pb_n+q$

この漸化式を解いて 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める.

求めた数列 $\{b_n\}$ と ① を ③ へ代入すると 数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる.

考 2 等比数列の漸化式へ変形

3 階差を利用する

補 3 ③ から数列 $\{a_n\}$ の階差数列が数列 $\{b_n\}$ であることからも数列 $\{a_n\}$ は求まる.

★漸化式 $a_{n+1}=pa_n+$（n の整式）

$f(n)$ は m 次の整式とする.

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$a_1=a$，$a_{n+1}=p\,a_n+f(n)$（p は n に無関係な定数）

について

$\boxed{1}$ $p=1$ のとき

$a_1=a$，$a_{n+1}-a_n=f(n)$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{f(n)\}$ であるから

$n\geqq 2$ のとき $a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

$\boxed{2}$ $p\neq 1$ のとき

$$a_{n+1}=p\,a_n+f(n)\ \cdots\cdots①$$
$$g(n+1)=p\,g(n)+f(n)\ \cdots\cdots②$$

② が n の恒等式となる m 次式 $g(n)$ を求める.

① − ② として $a_{n+1}-g(n+1)=p\{a_n-g(n)\}$

数列 $\{a_n-g(n)\}$ は初項 $a_1-g(1)$，公比 p の等比数列であるから

$$a_n-g(n)=\{a_1-g(1)\}\cdot p^{n-1}$$

よって $a_n=\{a_1-g(1)\}\cdot p^{n-1}+g(n)$

$\boxed{3}$ $a_{n+1}=p\,a_n+f(n)\ \cdots\cdots①$

① の n を $n+1$ として

$$a_{n+2}=p\,a_{n+1}+f(n+1)\ \cdots\cdots②$$

② − ① として $a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)+f(n+1)-f(n)$

ここで $f(n+1)-f(n)$ は $(m-1)$ 次式

$$a_{n+1}-a_n=b_n\ \cdots\cdots③$$

とおくと $b_{n+1}=p\,b_n+f(n+1)-f(n)$

この漸化式を解いて 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める.

求めた数列 $\{b_n\}$ と ① を ③ へ代入すると 数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる.

㋕ $\boxed{2}$ 等比数列の漸化式へ変形

$\boxed{3}$ 階差を $(m-1)$ 回利用

漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q^n$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ a_{n+1}=p\,a_n+q^n\ (p,\ q \text{ は } n \text{ に無関係な定数, } p \neq 0,\ q \neq 0)$$

について

$\boxed{1}$ $p=1$ のとき

$$a_1=a,\ a_{n+1}-a_n=q^n$$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列が数列 $\{q^n\}$ であるから

$$n \geqq 2 \text{ のとき } a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}q^k$$

$\boxed{2}$ $p \neq 1$ のとき

$$a_{n+1}=p\,a_n \quad +q^n \ \cdots\cdots①$$
$$g(n+1)=p\,g(n)+q^n \ \cdots\cdots②$$

② が n の恒等式となる $g(n)=(\alpha n+\beta)\cdot q^n$ を求める．

①－② として $a_{n+1}-g(n+1)=p\{a_n-g(n)\}$

数列 $\{a_n-g(n)\}$ は初項 $a_1-g(1)$，公比 p の等比数列であるから

$$a_n-g(n)=\{a_1-g(1)\}\cdot p^{n-1}$$

よって $a_n=\{a_1-g(1)\}\cdot p^{n-1}+g(n)$

$\boxed{3}$ 両辺 q^{n+1} で割り

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{q^n}+\frac{1}{q}$$
$$\frac{a_n}{q^n}=b_n \ \cdots\cdots①$$

とおき $b_{n+1}=\dfrac{p}{q}b_n+\dfrac{1}{q}$

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，① から 数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まる．

$\boxed{4}$ 両辺 p^{n+1} で割り

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^n$$
$$\frac{a_n}{p^n}=b_n \ \cdots\cdots①$$

とおき $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{p}\cdot\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，① から 数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まる．

★漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+r}$$ （$p,\ q,\ r$ は 0 以外の n に無関係な定数）

について

$\boxed{1}$ $a=0$ のとき

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+r}$$

よって $a_n=0$

$\boxed{2}$ $a \neq 0$ のとき

帰納的に任意の自然数 n に対して $a_n \neq 0$

両辺で逆数をとり $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{qa_n+r}{p\,a_n}$

すなわち $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{r}{p}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{q}{p}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ ……①

とおくと $b_{n+1}=\dfrac{r}{p}b_n+\dfrac{q}{p}$

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，① から 数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まる．

例 漸化式 $a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n}{a_n+8}$ を解く

$a_1=4>0$ であるから帰納的にすべての自然数 n に対して $a_n>0$

両辺で逆数をとり $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+8}{4a_n}$ すなわち $\dfrac{1}{a_{n+1}}=2\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{4}$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ ……①

とおくと $b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{4}$

$b_{n+1}=2b_n+\dfrac{1}{4}$

変形して $b_{n+1}+\dfrac{1}{4}=2\left(b_n+\dfrac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{4}\right\}$ は初項 $b_1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$，公比 2 の等比数列であるから

$b_n+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot 2^{n-1}$ すなわち $b_n=\dfrac{2^n-1}{4}$

よって ① から $a_n=\boldsymbol{\dfrac{4}{2^n-1}}$

★漸化式 $a_{n+1}=f(n)a_n$

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$a_1=a$，$a_{n+1}=f(n)\,a_n$　ただし $f(n)$ は定数ではない

について

$\boxed{1}$ $n \geqq 2$ のとき

繰り返し変形して $a_n=f(n-1)f(n-2)\cdot\cdots\cdot f(1)a_1$

$\boxed{2}$ 両辺を $(n+1)!$ で割り

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{f(n)}{n+1}\cdot\frac{a_n}{n!}$$

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n!}\right\}$ についての漸化式 を考える．

$\boxed{3}$ 任意の自然数 n に対して $a_n>0$, $f(n)>0$ であるならば
底が c の対数をとり

$$\log_c a_{n+1}=\log_c f(n)+\log_c a_n$$

$\log_c a_n=b_n$ ……①

とおくと $b_1=\log_c a_1=\log_c a$，$b_{n+1}=b_n+\log_c f(n)$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\{\log_c f(n)\}$ である．

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，① から数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる．

㊟補 $\boxed{1}$ の求め方が定石だが，問題によっては $\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の解法も頭に入れておくとよい．

㊟ 数列 $\{a_n\}$ は公比 $f(n)$ の等比数列としないように．

㊞例 漸化式 $a_1=1$，$a_{n+1}=(n+1)a_n$ を解く．

$\boxed{1}$ $n \geqq 2$ のとき 繰り返し変形して

$$\begin{aligned} a_n &= n\,a_{n-1} \\ &= n(n-1)a_{n-2} \\ &\ \ \vdots \\ &= n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1\cdot a_1 \\ &= n! \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

よって $\boldsymbol{a_n=n!}$

$\boxed{2}$ 両辺を $(n+1)!$ で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{a_n}{n!}$

$\left\{\dfrac{a_n}{n!}\right\}$ は定数数列であるから $\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_1}{1!}=1$

よって $\boldsymbol{a_n=n!}$

★漸化式 $a_{n+2}+p\,a_{n+1}+q\,a_n=0$ を解く手順

数列 $\{a_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ a_2=b,\ a_{n+2}+p\,a_{n+1}+q\,a_n=0$$

（p，q は0でない n に無関係な定数）

について，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める次のような手順がある．

$\boxed{1}$ 2次方程式 $x^2+px+q=0$ の解 $x=\alpha,\beta$（重解は $\alpha=\beta$）を求める．

$\boxed{2}$ $\begin{cases} a_{n+2}-\alpha\,a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha\,a_n) & \cdots\cdots① \\ a_{n+2}-\beta\,a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta\,a_n) & \cdots\cdots② \end{cases}$

と変形する．（重解は①と②が同じ式）

$\boxed{3}$ ①において $a_{n+1}-\alpha\,a_n=b_n$ ……③

とおくと $b_{n+1}=\beta\,b_n$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=a_2-\alpha a_1=b-\alpha a$，公比 β の等比数列であるから

$$b_n=(b-\alpha a)\beta^{n-1}$$

②において $a_{n+1}-\beta\,a_n=c_n$ ……④

とおくと $c_{n+1}=\alpha\,c_n$

数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1=a_2-\beta a_1=b-\beta a$，公比 α の等比数列であるから

$$c_n=(b-\beta a)\alpha^{n-1}$$

$\boxed{4}$ ③－④として $(\beta-\alpha)a_n=b_n-c_n$

$\alpha\neq\beta$ ならば $a_n=\dfrac{b_n-c_n}{\beta-\alpha}=\dfrac{(b-\alpha a)\beta^{n-1}-(b-\beta a)\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}$

③，④のいずれか一方からも数列 $\{a_n\}$ の一般項は求まる．

考 ①，②は $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

変形するには $\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$ であることが必要で，

α，β が解となる2次方程式の1つが $x^2+px+q=0$

補 重解のときは③の隣接二項間漸化式を解けばよい．

☆連立漸化式

2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ b_1=b,\ \begin{cases} a_{n+1}=p\,a_n+q\,b_n & \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=r\,a_n+s\,b_n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

(a，b，p，q，r，s は n に無関係な定数で $(a,\ b)\neq(0,\ 0)$，$(p-s)^2+4qr>0$，$r\neq 0$)

について，2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求める次のような手順がある．

$\boxed{1}$ ①＋②×α として $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=(p+r\alpha)a_n+(q+s\alpha)b_n$ ……③

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n+\alpha b_n\}$ が公比 $(p+r\alpha)$ の等比数列になるような α を求める．
つまり

$$\begin{aligned} a_{n+1}+\alpha\,b_{n+1} &= (p+r\alpha)(a_n+\alpha b_n) \quad \cdots\cdots ④ \\ &= (p+r\alpha)a_n+(p\alpha+r\alpha^2)b_n \quad \cdots\cdots ⑤ \end{aligned}$$

を満たす α を求める．

③と⑤の(右辺)の b_n の係数が等しいので $q+s\alpha=p\alpha+r\alpha^2$
すなわち $r\alpha^2+(p-s)\alpha-q=0$ を満たす α を求める．

$\boxed{3}$ $\boxed{2}$ で求めた2つの α に対し④を考える．
それぞれ数列 $\{a_n+\alpha b_n\}$ が公比 $(p+r\alpha)$ の等比数列であることから，
2つの関係式を作り2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項は求まる．

㊥ $p=s$ かつ $q=r$ ならば $\alpha=\pm 1$ となり，対称性のある連立漸化式になる．
㊥ 連立漸化式から b_n を消して，数列 $\{a_n\}$ の隣接三項間漸化式に帰着することもできる．
㊬ 行列からも求まる．

対称性のある連立漸化式

2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の漸化式

$$a_1=a,\ b_1=b,\ \begin{cases} a_{n+1}=p\,a_n+q\,b_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=q\,a_n+p\,b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

（a，b，p，q は n に無関係な定数で $(a,b)\neq(0,0)$，$q\neq 0$）

について，2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求める次のような手順がある．

$\boxed{1}$ ①＋② として $a_{n+1}+b_{n+1}=(p+q)(a_n+b_n)$ ……③

①－② として $a_{n+1}-b_{n+1}=(p-q)(a_n-b_n)$ ……④

$\boxed{2}$ ③ から 数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=a+b$，公比 $p+q$ の等比数列

④ から 数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=a-b$，公比 $p-q$ の等比数列

すなわち

$$\begin{cases} a_n+b_n=(a+b)(p+q)^{n-1} & \cdots\cdots⑤ \\ a_n-b_n=(a-b)(p-q)^{n-1} & \cdots\cdots⑥ \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $\dfrac{⑤+⑥}{2}$ として $a_n=\dfrac{(a+b)(p+q)^{n-1}+(a-b)(p-q)^{n-1}}{2}$

$\dfrac{⑤-⑥}{2}$ として $b_n=\dfrac{(a+b)(p+q)^{n-1}-(a-b)(p-q)^{n-1}}{2}$

補 連立漸化式 $\begin{cases} a_{n+1}=p\,a_n+q\,b_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=r\,a_n+s\,b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$

は $p=s$ かつ $q=r$ ならば2式の和 ①＋②，差 ①－② を計算するとよい．

例 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の漸化式

$$a_1=2,\ b_1=1,\ \begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=a_n+2b_n & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①＋② として $a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$ ……③

①－② として $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$ ……④

③ から数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=3$，公比3の等比数列

④ から数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=1$，公比1の等比数列（定数数列）

すなわち

$$\begin{cases} a_n+b_n=3^n & \cdots\cdots⑤ \\ a_n-b_n=1 & \cdots\cdots⑥ \end{cases}$$

$\dfrac{⑤+⑥}{2}$ として $\boldsymbol{a_n=\dfrac{3^n+1}{2}}$

$\dfrac{⑤-⑥}{2}$ として $\boldsymbol{b_n=\dfrac{3^n-1}{2}}$

数学的帰納法

すべての自然数 n に対して

命題 $P(n)$ が成り立つ ……Ⓐ

ことを証明するのに

（Ⅰ）出発点が成り立つ

（Ⅱ）次から次へと成り立つ

という2つの（Ⅰ），（Ⅱ）を示すことでⒶが証明される方法がある．

この証明法を **数学的帰納法**（すうがくてききのうほう）という．

㊓（Ⅰ），（Ⅱ）はどちらから示してもよい．
㊓（Ⅰ），（Ⅱ）の具体例に次がある．

1（Ⅰ）$n=1$ のとき，Ⓐは成り立つ．
（Ⅱ）$n=k\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$ のときⒶが成り立つとする仮定すると，
$n=k+1$ のときもⒶが成り立つ．

2（Ⅰ）$n=1,\ 2$ のとき，Ⓐは成り立つ．
（Ⅱ）$n=k,\ k+1\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$ のときⒶが成り立つとする仮定すると，
$n=k+2$ のときもⒶが成り立つ．

3（Ⅰ）$n=1$ のとき，Ⓐは成り立つ．
（Ⅱ）$n=1,\ 2,\ \cdots,\ m\ (m=1,\ 2,\ \cdots)$ のときⒶが成り立つとする仮定すると，
$n=m+1$ のときもⒶが成り立つ．

㊧ 1「今日が元旦ならば翌日も元旦とする」という法律ができたとすると，
1月1日は元旦なので，1月2日も元旦となり，1月3日も元旦となり……
1年中元旦になる．