

数学 A 図形の性質「空間図形」

～高校数学のまとめ～

□ 2 直線の位置関係

空間内に 2 本の異なる直線 l , m がある.

これらの位置関係は次のようになる.

① l と m がただ 1 つの共有点 A をもつとき

l と m は 交わる といひ 共有点 A を l と m の 交点 といひ.

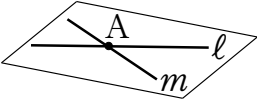
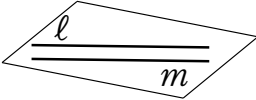
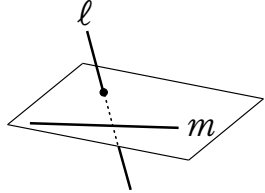
このとき l と m は同一平面上にある.

② l と m が共有点をもたないかつ同一平面上にあるとき

l と m は 平行 であるといひ $l \parallel m$ とかく.

③ l と m が共有点をもたないかつ同一平面上にないとき

l と m は ねじれの位置 にあるといひ.

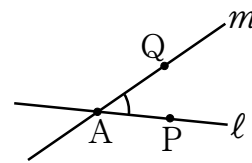
	①	②	③
位置関係	交わる	平行	ねじれの位置
グラフ			

□ 2 直線のなす角

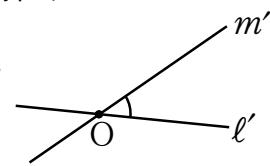
空間内に 2 本の異なる直線 l, m がある.

2 直線 l, m のなす角は次のように定義される.

- ① l と m がただ 1 つの共有点 A をもつとき
 l, m 上にそれぞれ点 A 以外の点 P, Q をとり
 90° 以下となる $\angle PAQ$ を 2 直線 l, m のなす角 とする.



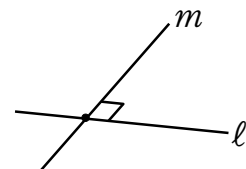
- ② l と m が 共有点をもたないとき
 1 点 O を通り l, m にそれぞれ平行な直線 l', m' を引くと
 l', m' のなす角は, 点 O の取り方に関係なく一定である.
 この角を 2 直線 l, m のなす角 とする.



2 直線 l, m のなす角が 90° であるならば

l と m は ^{すいちよく} 垂直 であるといい $l \perp m$ とかく.

垂直な 2 直線が交わるとき, それらは ^{ちよっこう} 直交 するという.



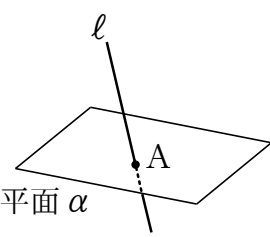
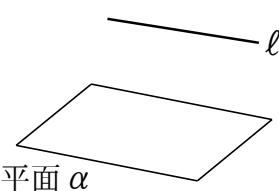
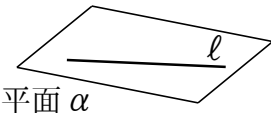
⑨ 2 直線 l, m のなす角が 0° であるならば, l と m は一致するか平行になる.

□直線と平面の位置関係

空間内に直線 l と平面 α がある.

これらの位置関係は次のようになる.

- ① 直線 l と平面 α がただ 1 つの共有点 A をもつとき
 l と α は 交わる といい, 共有点 A を l と α の 交点 という.
- ② 直線 l と平面 α が 共有点をもたないとき
 l と α は 平行 であるといい $l // \alpha$ とかく.
- ③ 直線 l と平面 α が異なる 2 点を共有する とき
 l は α 上にある.
 このとき, 直線 l 上の任意の点は平面 α 上にある.

	①	②	③
位置関係	交わる	平行である	直線が平面上にある
グラフ			

□ 垂線

平面 α 上にない点 P を通り、 α に垂直な直線 がただ 1 つある。

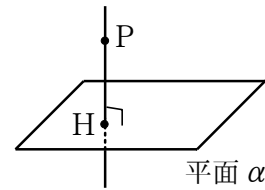
この直線を点 P から平面 α に下ろした ^{すいせん}垂線 という。

平面 α と垂線の交点を H として

点 P から垂線 PH を下ろす という。

線分 PH の長さを点 P と平面 α の ^{きより}距離 という。

また、点 H を ^{あし}垂線の足 という。

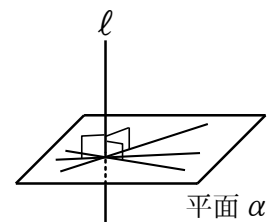


□ 平面と直線が垂直

平面 α と直線 l について

直線 l が平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき

l と α は 垂直であるといい $\alpha \perp l$ とかく。

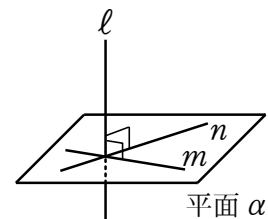


⑧ 直線 l を平面 α の ^{ほうせん}法線 という。

⑨ 要

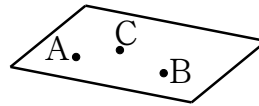
直線 l が平面 α 上の交わる 2 直線 m , n に垂直ならば

$$l \perp \alpha$$



平面の表記

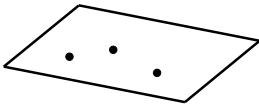
一直線上にない3点 A, B, C があるとき,
その3点を通る平面がただ1つに決まる.
この平面を 平面 ABC という.



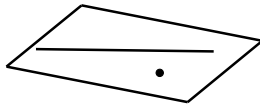
平面の決定条件

空間において
次のうち1つが与えられると, それらを満たす平面がただ1つに定まる.

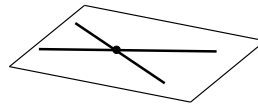
①



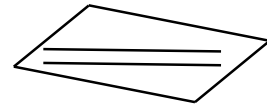
②



③



④



- ① 一直線上にない3点を与えられる.
- ② 1つの直線とその上にない1点を与えられる.
- ③ 交わる2直線を与えられる.
- ④ 平行な2直線を与えられる.

□ 2 平面の位置関係

空間内に 2 つの異なる平面 α , β がある.

これらの位置関係は次のようになる.

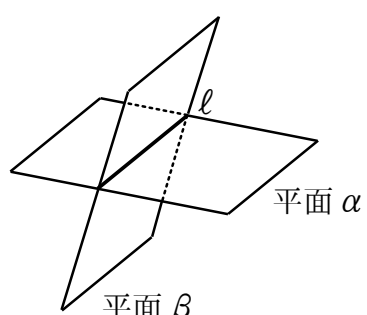
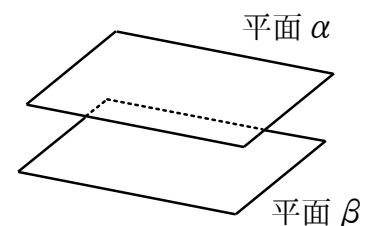
① 2 平面 α , β が共有点をもつとき

この 2 平面はその点を通る直線 l を共有する.

このとき α と β は **交わる** といい, 共有する直線 l を α と β の **交線** こうせん という.

② 2 平面 α , β が共有点をもたないとき

α と β は **平行** であるといい $\alpha // \beta$ とかく.

	①	②
位置関係	交わる	平行である
グラフ		

□ 2 平面のなす角

交線 l で交わる 2 つの平面 α , β がある.

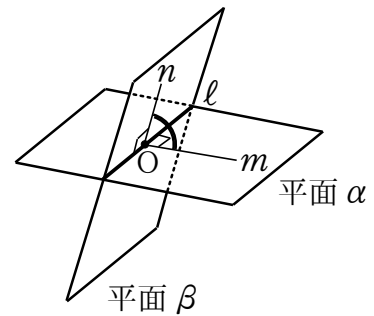
交線 l 上の 1 点 O を通り, 平面 α , β 上にそれぞれ l と垂直な直線 m , n を引くと m , n のなす角は点 O のとり方に関係なく一定である.

この角を 2 平面 α , β の **なす角** という.

2 平面 α , β のなす角が 90° であるとき

α と β は **垂直** である または **直交** するとい

$\alpha \perp \beta$ とかく.



⑨ 補 2 つの平面 α , β のそれぞれの法線のなす角を 2 平面のなす角と考えることもできる.

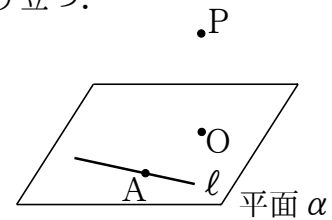
★三垂線の定理

α を平面とし, P を平面 α 上にない点とする.

l を平面 α 上の直線とし, A を直線 l 上の点,

O を平面 α 上にあり直線 l 上にない点とするとき, 次が成り立つ.

- ① $PO \perp \alpha, OA \perp l \implies PA \perp l$
- ② $PO \perp \alpha, PA \perp l \implies OA \perp l$
- ③ $PA \perp l, OA \perp l, PO \perp AO \implies PO \perp \alpha$



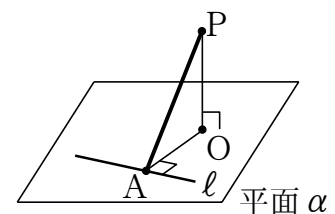
① $PO \perp \alpha, OA \perp l$ とする.

$PO \perp \alpha$ より $PO \perp l$

l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PO, OA に垂直なので

$l \perp$ 平面 AOP

よって PA は平面 AOP 上にあるから $PA \perp l$



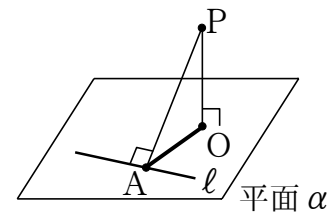
② $PO \perp \alpha, PA \perp l$ とする.

$PO \perp \alpha$ より $PO \perp l$

l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PO, PA に垂直なので

$l \perp$ 平面 AOP

よって PA は平面 AOP 上にあるから $OA \perp l$



③ $PA \perp l, OA \perp l, PO \perp AO$ とする.

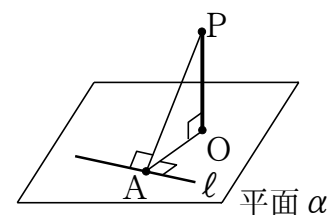
l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PA, OA に垂直なので

$l \perp$ 平面 AOP

PO は平面 AOP 上にあるから $PO \perp l$

よって PO は α 上の交わる 2 直線 AO, l に垂直であるから

$PO \perp \alpha$



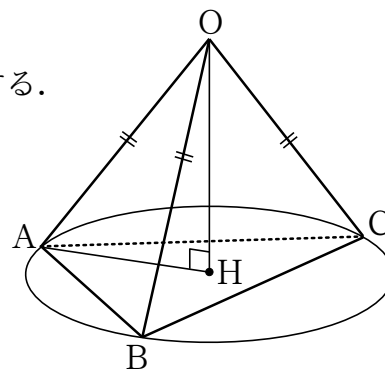
☆ 3本の脚の長さが等しい四面体と垂線

四面体 $OABC$ があり $OA = OB = OC$ を満たすとする.

このとき

点 O から平面 ABC へ垂線 OH を下ろすと

点 H は $\triangle ABC$ の **外心** になる.



⑧ 補 平面 ABC を点 O の対面という.

⑨ 考 $OA = OB = OC$, $\angle OHA = \angle OHB = \angle OHC = 90^\circ$, OH は共通より

$$\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$$

よって $HA = HB = HC$ であるから点 H は $\triangle ABC$ の外心である.

多面体

平面だけで囲まれた立体を^{ためんたい}多面体^{ためんたい}といい、

へこみのない多面体を^{とつためんたい}凸多面体^{とつためんたい}という。

n 個の面で囲まれている多面体を^{めんたい} n 面体^{めんたい}という。

どの面もすべて合同な多角形である多面体を^{せいためんたい}正多面体^{せいためんたい}といい、

n 個の合同な多角形で囲まれている多面体を^{せい}正^{めんたい} n 面体^{めんたい}という。

⑧ 三角錐，三角柱などを多面体という。

三角錐は 4 個の面で囲まれているので四面体，

三角柱は三角形 2 個と，四角形 3 個の 5 個の面で囲まれているので五面体という。

オイラーの多面体定理

多面体の

頂点 (vertex) の数を v , 辺 (edge) の数を e , 面 (face) の数を f とするとき
任意の多面体について

$$v - e + f = 2$$

すなわち (頂点の数) - (辺の数) + (面の数) = 2

⑧ 三角錐について

頂点は 4 個, 辺は 6 個, 面は 4 個

$$v - e + f = 4 - 6 + 4 = 2$$

⑨ 三角柱について

頂点は 6 個, 辺は 9 個, 面は 5 個

$$v - e + f = 6 - 9 + 5 = 2$$

正多面体

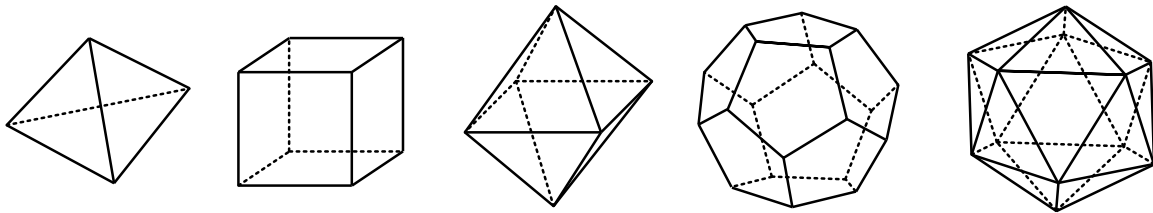
2つの条件

- ① 各面はすべて合同な正多角形である
- ② 各頂点に集まる面の数はすべて等しい

をみたす凸多面体を 正多面体 という。

これらは次の 5 種類しかない。

〔正四面体〕 〔正六面体〕 〔正八面体〕 〔正十二面体〕 〔正二十面体〕



正多面体	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
面の形	正三角形	正方形	正三角形	正五角形	正三角形
頂点の数	4	8	6	20	12
辺の数	6	12	12	30	30
面の数	4	6	8	12	20
頂点に集まる面の数	3	3	4	3	5

⑨ 正多面体でもオイラーの多面体定理は成り立つ。

⑩ 正 n 面体ならば面の数 $f = n$ はすぐわかる。

また、面はずべて正 n 角形で、1 面あたり辺は n 個で、面の数 f だけ辺はあるが、

2つの面でひとつの辺を共有するので 辺の数は $e = \frac{n \times f}{2}$ となる。

さらに、1 面あたり頂点は n 個で、面の数 f だけ頂点はあるので、頂点に集まる面の数を

m として、頂点の数は $v = \frac{n \times f}{m}$ となる。

例えば、正十二角形だと $f = 12$, $e = \frac{12 \times 5}{2} = 30$, $v = \frac{12 \times 5}{3} = 20$

☆等面四面体

4つの面がすべて合同な四面体を^{とうめんしめんたい}等面四面体という。

等面四面体には次の性質がある。

- ① 4つの合同な面は鋭角三角形である。
- ② 直方体に埋め込むことができる。

