

数学 A 図形の性質「平面図形」

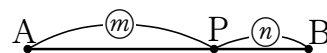
～高校数学のまとめ～

線分の内分点

m, n を正の数とする.

点 P が線分 AB 上にあつて $AP : PB = m : n$ のとき

点 P は線分 AB を $m : n$ に ないぶん 内分する という.



とくに 点 M が線分 AB を $1 : 1$ に内分する点とすると

点 M は線分 AB の ちゅうてん 中点 という.



線分の外分点

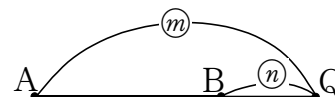
m, n を正の数とする.

点 Q が線分 AB の延長上にあつて

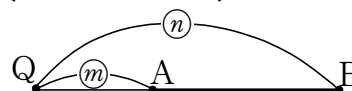
$AQ : QB = m : n$ のとき

点 Q は線分 AB を $m : n$ に がいぶん 外分する という.

[$m > n$ のとき]



[$m < n$ のとき]



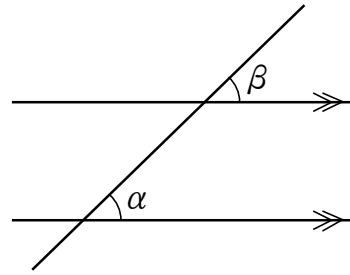
□ 同位角

右図のように

平行な 2 直線とそれらに交わる直線があるとき

$$\alpha = \beta$$

これを どういかく 同位角は等しい という.



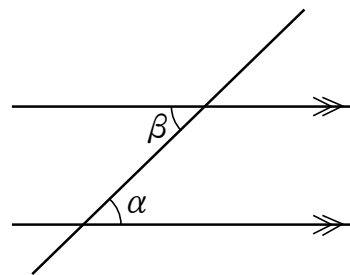
□ 錯角

右図のように

平行な 2 直線とそれらに交わる直線があるとき

$$\alpha = \beta$$

これを さっかく 錯角は等しい という.



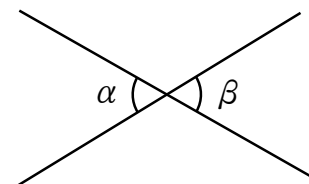
□ 対頂角

右図のように

交わる直線があるとき

$$\alpha = \beta$$

これを たいちようかく 対頂角は等しい という.



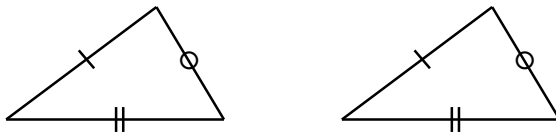
□ 合同を表す記号

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が ^{ごうどう} 合同 のとき $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ と表す。

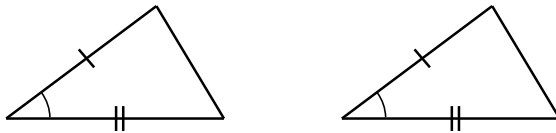
□ 三角形の合同条件

三角形が合同になる条件は次である。

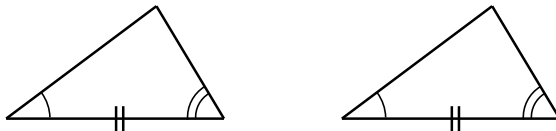
- ① 3 辺がそれぞれ等しい



- ② 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい



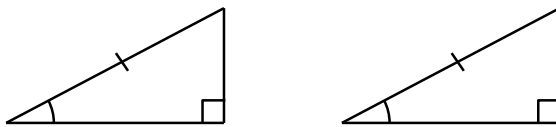
- ③ 1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい



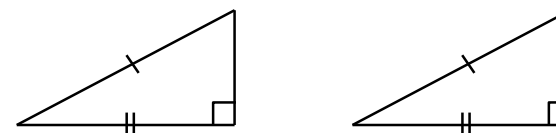
□ 直角三角形の合同条件

直角三角形が合同になる条件は次である。

- ① 斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい



- ② 斜辺とほかの 1 辺がそれぞれ等しい



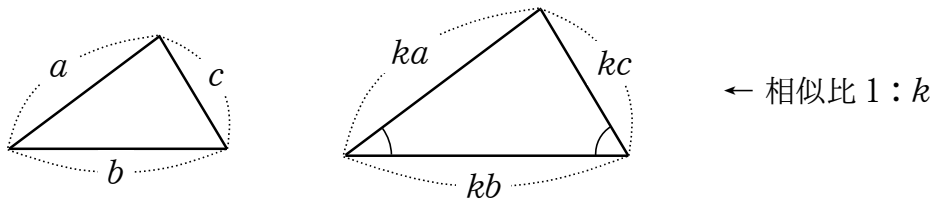
□相似を表す記号

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ が ^{そうじ}相似 のとき $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ と表す.

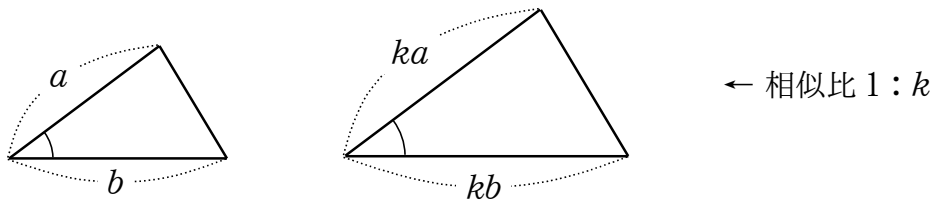
□三角形の相似条件

三角形が相似になる条件は次である.

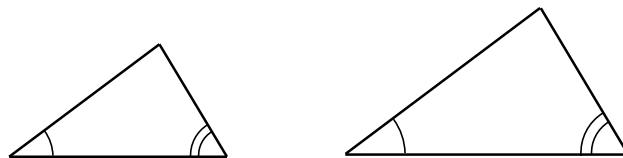
- ① 3 辺の辺の比がすべて等しい



- ② 2 辺の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい



- ③ 2 組の角がそれぞれ等しい



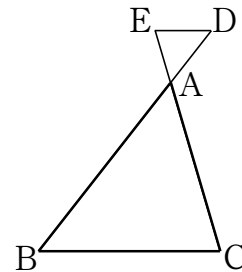
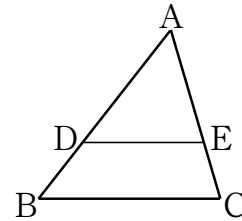
□ 三角形と平行線と比

$\triangle ABC$ があり,
直線 AB, AC 上にそれぞれ D, E があるとき

① $DE \parallel BC \iff AD : AB = AE : AC$

② $DE \parallel BC \iff AD : DB = AE : EC$

③ $DE \parallel BC \implies AD : AB = DE : BC$



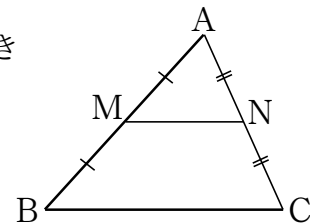
⑨ ③ は \Leftarrow が成り立たない.

⑩ $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ より相似比からわかる.

□ 中線連結定理

$\triangle ABC$ の辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とするとき

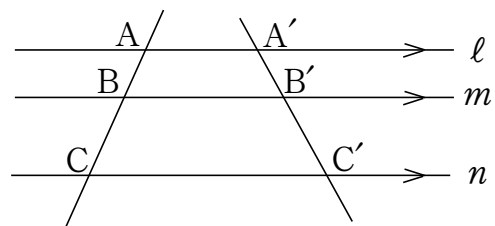
$$MN \parallel BC \text{ かつ } MN = \frac{1}{2} BC$$



□ 平行線と比

右図のように、平行な 3 直線 l, m, n があり,
その 3 直線と交わる 2 直線があり、交点を
 A, B, C, A', B', C' とするとき

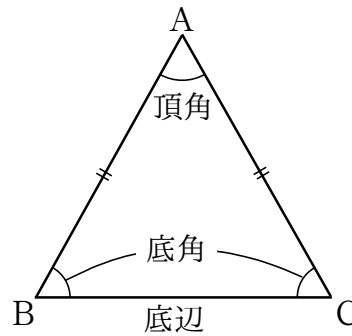
$$AB : BC = A'B' : B'C'$$



□二等辺三角形の用語

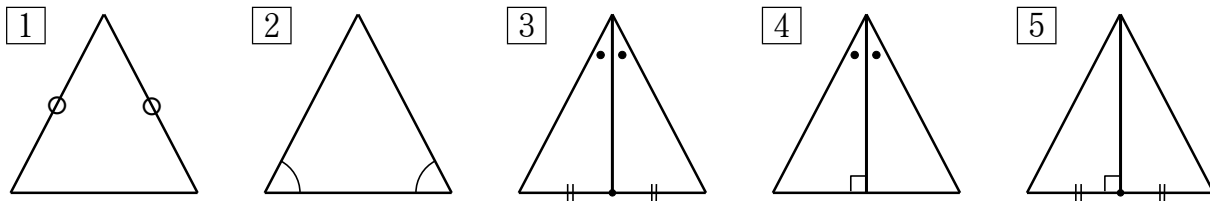
$AB = AC$ となる二等辺三角形 ABC において

- ① $\angle BAC$ を ^{ちようかく}頂角 という.
- ② $\angle ABC$ と $\angle ACB$ を ^{ていかく}底角 という.
- ③ 辺 BC を ^{ていへん}底辺 という.



□二等辺三角形の性質

二等辺三角形は次のような性質がある.



- ① 2 辺の長さが等しい (定義)
- ② 底角は等しい
- ③ 頂角の二等分線は底辺の中点を通る
- ④ 頂角の二等分線は底辺と垂直に交わる
- ⑤ 底辺の垂直二等分線は頂点を通る

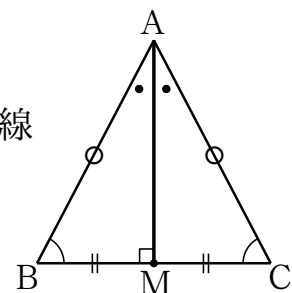
□二等辺三角形の中線

$AB = AC$ となる二等辺三角形 ABC において

辺 BC の中点を M とすると, 中線 AM は

$\angle BAC$ の二等分線, 線分 BC への垂線, 線分 BC の垂直二等分線
 になっている.

このとき $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$



Ⓜ 頂角の二等分線, 頂点から底辺に引いた中線, 垂線, 底辺の垂直二等分線はすべて一致する.

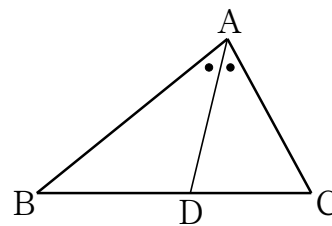
□内角の二等分線と比

△ABC の ∠A の内角の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

点 D は線分 BC を AB : AC に内分する.

すなわち

$$AB : AC = BD : DC$$



⑧ (平行線を考える)

直線 AD に平行で点 C を通る直線を l とする.

直線 l と直線 BA の交点を E とすると

直線 AD と直線 l は平行だから

$$\angle ACE = \angle AEC \text{ であるから } AC = AE$$

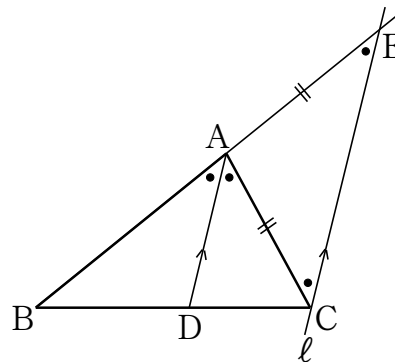
よって $AB : AC = AB : AE = BD : DC$

⑨ 補 AB = AC のとき

△ABC は二等辺三角形となり

BD = DC であるから

$$AB : AC = BD : DC = 1 : 1$$



★外角の二等分線と比

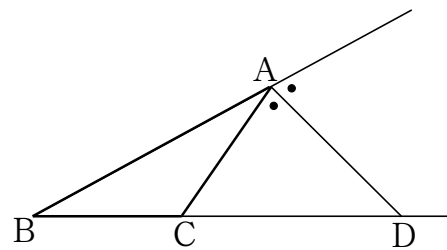
AB ≠ AC とする.

△ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とすると

点 D は線分 BC を AB : AC に外分する.

すなわち

$$AB : AC = BD : DC$$



④(平行線を考える)

④あ AB > AC のとき

直線 AD に平行で点 C を通る直線を l とする.

直線 l と直線 BA の交点を E とすると

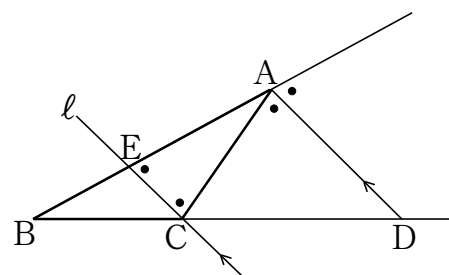
直線 AD と直線 l は平行である.

$\angle ACE = \angle AEC$ であるから $AC = AE$

$$AB : AC = AB : AE = BD : DC$$

④い AB < AC のとき ④あ と同様である.

④補 AB = AC のとき, ∠A の外角の二等分線は辺 BC と平行になり, 点 D は存在しない.

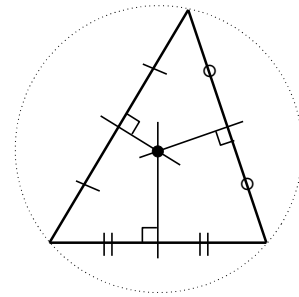


三角形の外心

三角形の3つの辺の垂直二等分線の交点を

三角形の ^{がいしん} 外心 という。

外心は三角形の外接円の中心である。



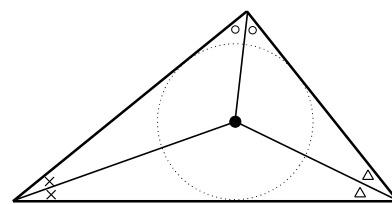
Ⓒ $\triangle ABC$ の外心 O

三角形の内心

三角形の3つの内角の二等分線の交点を

三角形の ^{ないしん} 内心 という。

内心は三角形の内接円の中心である。



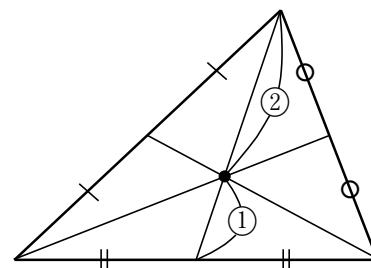
Ⓒ $\triangle ABC$ の内心 I

三角形の重心

三角形の3つの中線の交点を

三角形の ^{じゅうしん} 重心 という。

重心は各中線を右図のように $2:1$ に内分する。



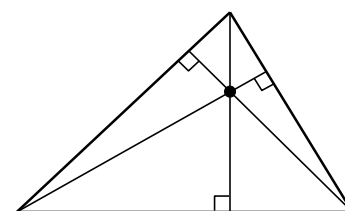
Ⓒ $\triangle ABC$ の重心 G

三角形の垂心

三角形の各頂点から

対辺またはその延長に下ろした3本の垂線の交点を

三角形の ^{すいしん} 垂心 という。



Ⓒ $\triangle ABC$ の垂心 H

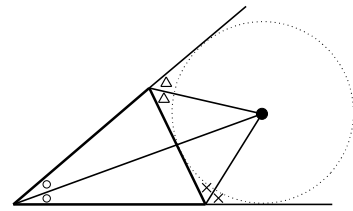
★ 三角形の傍心

三角形の 1 つの内角の二等分線と

他の 2 つの頂点における外角の二等分線の交点を

三角形の ^{ぼうしん} 傍心 という.

傍心は三角形の 1 つの内角に対する ^{ぼうせつえん} 傍接円の中心である.



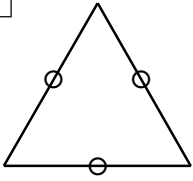
⑧ 補 傍心は一つの三角形に対して 3 つある.

⑨ $\triangle ABC$ の傍心 P_1, P_2, P_3

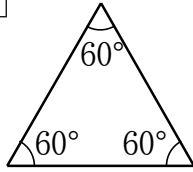
□正三角形の性質

正三角形は次のような性質がある.

①



②



① 3 辺の長さが等しい (定義)

② 3 つの内角はすべて 60° で等しい

正三角形と外心, 内心, 重心, 垂心

① 正三角形は外心, 内心, 重心, 垂心のすべてが一致する.

② 外心, 内心, 重心, 垂心のうちの 2 つが一致する三角形は正三角形である.

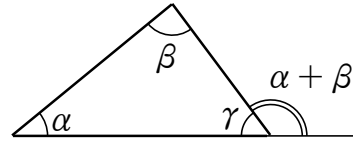
□ 三角形の内角と外角

右図において $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

すなわち

① 三角形の内角の和は 180°

② 三角形の外角はそれと隣り合わない 2 つの内角の和に等しい



三角形の3辺の長さの関係

三角形において

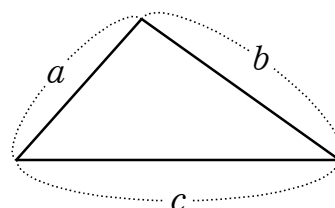
$$(1 \text{ 辺の長さ}) < (\text{残り 2 辺の長さの和})$$

三角形の成立条件

3つの数 a, b, c を3辺の長さとする三角形が存在するための条件は

$a > 0, b > 0, c > 0$ のもとで

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases} \iff |a - b| < c < a + b$$



すなわち

$$(2 \text{ 辺の長さの差}) < (1 \text{ 辺の長さ}) < (2 \text{ 辺の長さの和})$$

とくに c が最大の長さになるとき $c < a + b$ のみでよい.

⑨ $|a - b| < c$ ならば $|a - b| \geq 0$ であることから $c > 0$ も成り立つ.

三角形の辺と角の大小関係

$BC = a, CA = b, AB = c, \angle BAC = A, \angle ABC = B, \angle BCA = C$

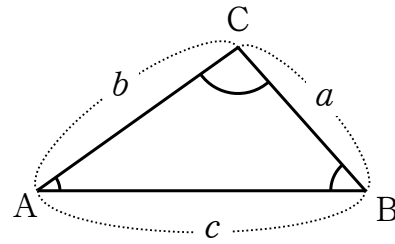
となる $\triangle ABC$ に対して

$$a < b < c \iff A < B < C$$

すなわち

① (短い辺に対角) < (長い辺の対角)

② (小さい角の対角) < (大きい角の対辺)

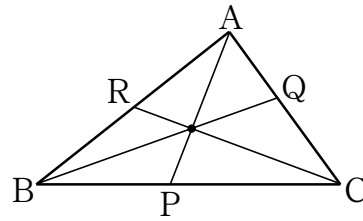


チェバの定理

$\triangle ABC$ において、3 辺 BC , CA , AB またはその延長線上にそれぞれ
点 P , Q , R があり、

3 直線 AP , BQ , CR が 1 点で交わる時

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



⑧ 3 直線 AP , BQ , CR が交わる 1 点を O として面積比より

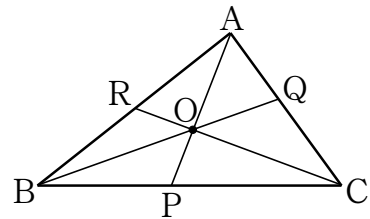
$$\frac{BP}{PC} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OAC}$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\triangle OBC}{\triangle OBA}$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\triangle OCA}{\triangle OCB}$$

よって

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{\triangle OAB}{\triangle OAC} \cdot \frac{\triangle OBC}{\triangle OAB} \cdot \frac{\triangle OCA}{\triangle OCB} = 1$$



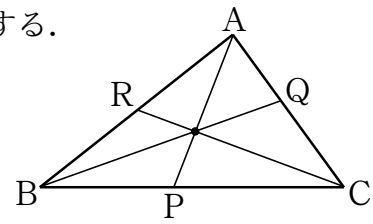
★チェバの定理の逆

△ABC において、3 直線 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R をとる。

ただし、P, Q, R はいずれも A, B, C と異なる点とする。

このとき $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$ ならば

3 直線 AP, BQ, CR は 1 点で交わる。



⑧ $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \dots\dots①$

① が成り立つとする。

直線 AP と直線 CR の交点を O とし、
直線 BO と辺 CA の交点を Q' とする。

3 直線 AP, BQ', CR は 1 点で交わるのでチェバの定理から

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ'}{Q'A} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \dots\dots②$$

① = ② が成り立つので

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{CQ'}{Q'A} \quad \text{すなわち} \quad CQ \cdot Q'A = CQ' \cdot QA$$

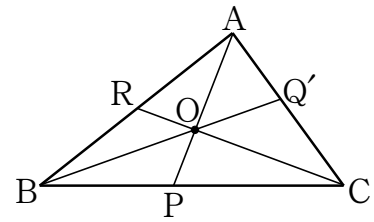
ここで $Q'A = CA - CQ'$, $QA = CA - CQ$ が成り立つので代入して

$$CQ(CA - CQ') = CQ'(CA - CQ)$$

$$\text{すなわち} \quad CA(CQ - CQ') = 0$$

$$CA \neq 0 \text{ であるから} \quad CQ = CQ'$$

よって $Q = Q'$ であるから 3 直線 AP, BQ, CR は 1 点で交わる。

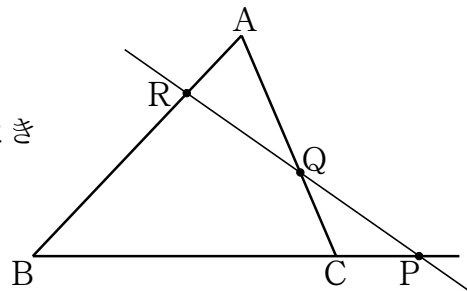


メネラウスの定理

ある直線が $\triangle ABC$ の 3 辺 BC , CA , AB

またはその延長とそれぞれ点 P , Q , R で交わるとき

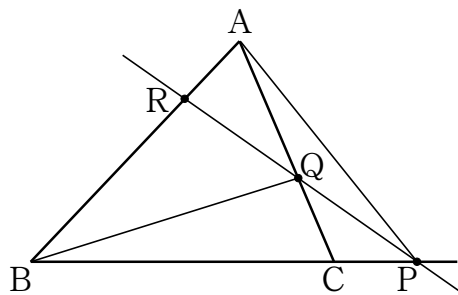
$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



⑨ 逆も成り立つ.

⑩ 面積比より

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{\triangle QBP}{\triangle QCP} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{\triangle QCP}{\triangle QAP} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{\triangle QAP}{\triangle QBP} \end{aligned}$$



よって

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{\triangle QBP}{\triangle QCP} \cdot \frac{\triangle QCP}{\triangle QAP} \cdot \frac{\triangle QAP}{\triangle QBP} = 1$$

⑪ 点 A を通り、直線 PR に平行な直線と直線 BP の交点を E とする.

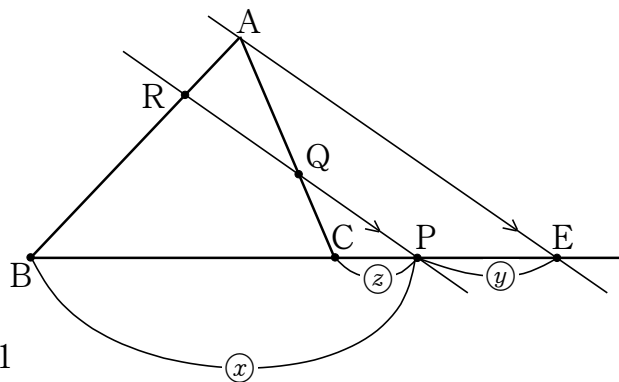
$BP : PC : PE = x : y : z$ とすると

線分の比を考えて

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{x}{z} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{z}{y} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$$



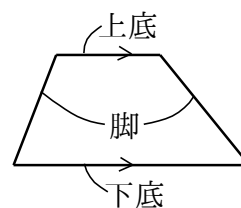
□台形

少なくとも 1 組の向かい合う辺が平行である四角形を ^{だいけい}台形 という。

平行な 2 本の向かい合う辺を台形の ^{ていへん}底辺 といい、

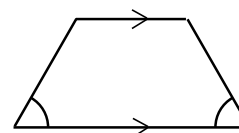
そのうち一方を ^{じょうてい}上底, 他方を ^{かてい}下底 という。

また, もう 1 組の向かい合う辺を台形の ^{きゃく}脚 という。



□等脚台形

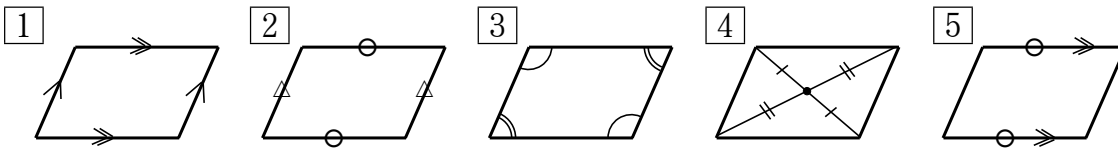
1 つの底辺の両端の内角が等しい台形を ^{とうきゃくだいけい}等脚台形 という。



⑨ 脚が等しいという定義ではない。長方形でない平行四辺形は等脚台形ではない。

□ 平行四辺形の性質

へいこうしへんけい
 平行四辺形は次の性質がある。

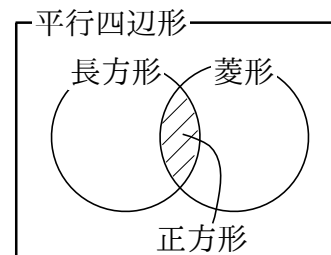
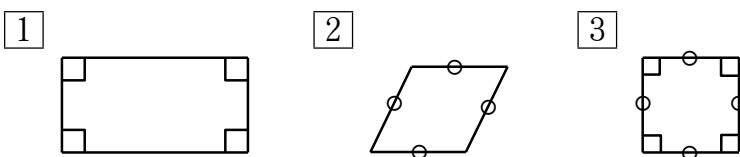


- ① 2組の向かい合う辺がそれぞれ平行である(定義)
- ② 2組の向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい
- ③ 2組の向かい合う角がそれぞれ等しい
- ④ 対角線がそれぞれの中点で交わる
- ⑤ 1組の向かい合う辺が平行で長さが等しい

⑨ ①～⑤のうち1つが成り立てば平行四辺形である。

□ 長方形, 菱形, 正方形

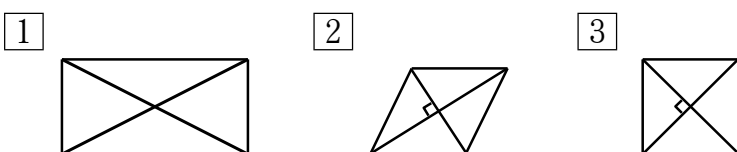
平行四辺形には次のような四角形がある。



- ① 4つの角が等しい四角形を ちょうほうけい 長方形 という。
- ② 4つの辺の長さが等しい四角形を ひしがた 菱形 という
- ③ 4つの角が等しい かつ 4つの辺の長さが等しい四角形を せいほうけい 正方形 という。

□ 対角線の性質

四辺形の対角線について, 次の性質がある。



- ① 長方形の対角線の長さは等しい
- ② 菱形の対角線は垂直に交わる
- ③ 正方形の対角線の長さは等しい かつ 垂直に交わる

多角形

線分だけで囲まれた平面図形を ^た ^か ^っ ^け ^い **多角形** という。

多角形を囲む線分を多角形の ^へ ^ん **辺** という。

2つの辺が交わる点をその多角形の ^ち ^{ょう} ^て ^ん **頂点** という。

n 個の辺をもつ多角形を ^か ^っ ^け ^い **n 角形** または ^へ ^ん ^け ^い **n 辺形** という。

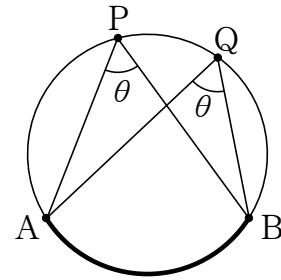
n 個の辺の長さがすべて等しい多角形を ^{せい} ^か ^っ ^け ^い **正 n 角形** という。

□円周角の定理

右の図のように円周上に異なる 4 点 A, B, P, Q があり
 2 点 P, Q が直線 AB に関して同じ側にあるとき

$$\angle APB = \angle AQB$$

すなわち 同じ弧に対する円周角は等しい.



□円周角と中心角の関係

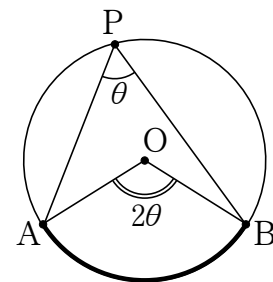
右の図のように

点 O を中心とする円上に異なる 3 点 A, B, P があり
 弧 \widehat{AB} 上に P がないとき

① $\angle AOB = 2 \angle APB$

② $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$

すなわち 同じ弧に対する円周角と中心角の大きさの比は 1 : 2



□直径と円周角

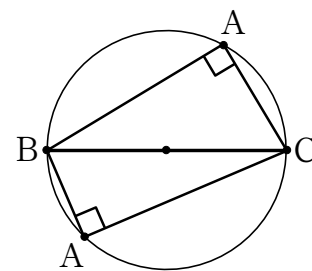
円上に異なる 3 点 A, B, C があるとき

線分 BC が円の直径 $\iff \angle BAC = 90^\circ$

すなわち

① 半円の弧 (直径) に対する円周角は直角

② 直角三角形があれば斜辺は外接円の直径



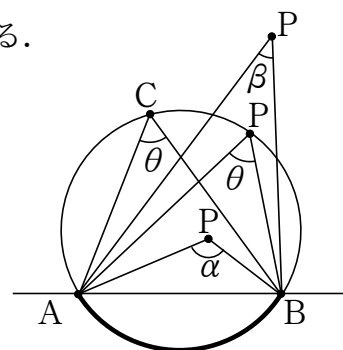
円の内部と外部

円上に異なる 3 点 A, B, C がある.

この平面上で直線 AB に関して点 C と同じ側に点 P をとる.

このとき, $\angle APB$ の大きさについて

- ① 点 P が円の周上 $\iff \angle APB = \angle ACB$
- ② 点 P が円の内部 $\iff \angle APB > \angle ACB$
- ③ 点 P が円の外部 $\iff \angle APB < \angle ACB$



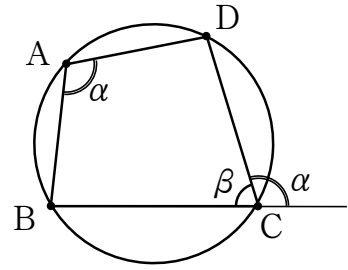
点 P が円の周上, 内部, 外部のときの $\angle APB$ をそれぞれ θ, α, β とすると

$$\beta < \theta < \alpha$$

□円に内接する四角形の内角と外角

凸四角形 ABCD が円に内接するとき

- ① 四角形 ABCD の対角の和は 180°
- ② 四角形 ABCD の外角は
それと隣り合う内角の対角に等しい



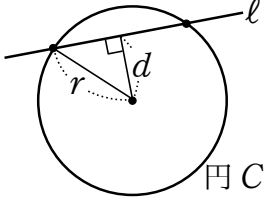
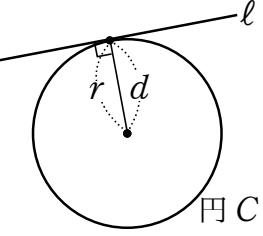
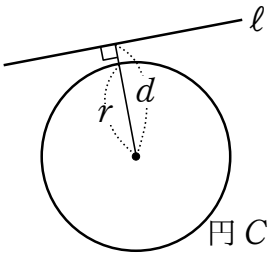
右図のように $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$ とすると $\alpha + \beta = 180^\circ$

円と直線の位置関係

平面上に円 C と直線 l がある.

円 C の中心と直線 l の距離を d , 円 C の半径を r として,

円 C と直線 l の位置関係は次のようになる.

d と r	$d < r$	$d = r$	$d > r$
位置関係	異なる 2 点で交わる	1 点で接する	共有点をもたない
グラフ			

接線と弦のつくる角の定理 (接弦定理)

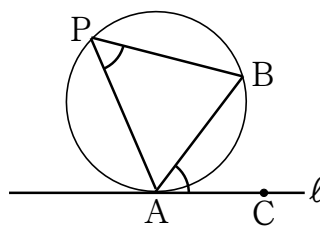
$\triangle ABP$ の外接円の点 A における接線を ℓ とし

右の図のように点 C を ℓ 上にとるとき

$$\angle BAC = \angle APB$$

すなわち、弦 AB と点 A における接線のなす角は

その角内にある \widehat{AB} に対する円周角に等しい。



⑧ $\angle BAC = \theta$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) とおく.

円上に AP' が直径となるように点 P' をとると $\angle ABP' = 90^\circ$

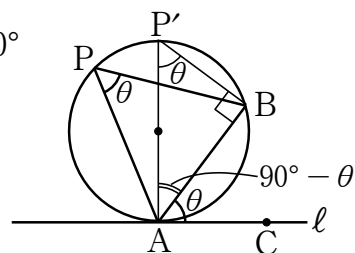
$AP' \perp \ell$ なので $\angle CAP' = 90^\circ$

$\angle BAP' = 90^\circ - \theta$ であるから $\angle AP'B = \theta$

円周角の定理から $\angle APB = \angle AP'B = \theta$

よって $\angle BAC = \angle APB (= \theta)$

$\theta = 90^\circ$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$ のときも成り立つ.

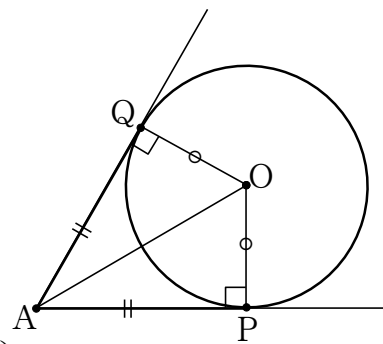


□円外の点からの接線

平面上に中心が O の円と外部に点 A がある.

点 A から円へ接線を 2 本引き, 接点を P, Q とすると

$\triangle OPA \equiv \triangle OQA$ であるから, 次が成り立つ.



- ① $AP = AQ$ (接線の長さは等しい)
- ② $\angle OAP = \angle OAQ$ (直線 AO は $\angle PAQ$ の二等分線)
- ③ $\angle AOP = \angle AOQ$ (直線 OA は $\angle POQ$ の二等分線)

④ 点 P, Q は接点なので $\angle OPA = \angle OQA = 90^\circ$

円の半径より $OP = OQ$

OA は共通である.

斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい直角三角形であるから $\triangle OPA \equiv \triangle OQA$

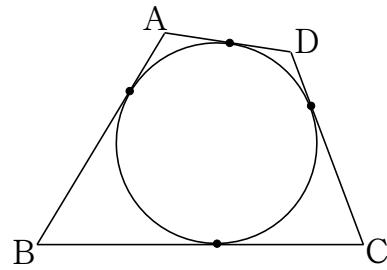
☆円に外接する四角形

四角形 ABCD が円に外接するとき

$$AB + CD = AD + BC$$

すなわち

四角形が円に外接するとき 対角の和が等しい.



⑧ 辺 AB, BC, CD, DA と円との接点をそれぞれ P, Q, R, S とおく.

$$AP = AS = x$$

$$BP = BQ = y$$

$$CQ = CR = z$$

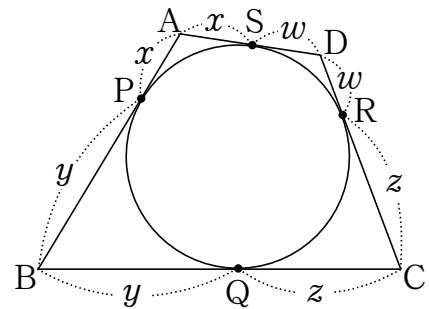
$$DR = DS = w$$

とすると

$$AB + CD = AP + BP + CR + DR = x + y + z + w$$

$$AD + BC = AS + DS + BQ + CQ = x + y + z + w$$

よって $AB + CD = AD + BC$



方べきの定理

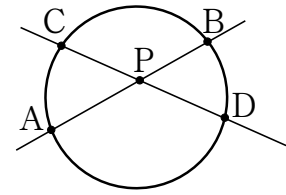
定点 P を通る直線と円が 2 つの交点をもつとき

点 P と交点の距離の積は直線のとり方によらず一定値になる.

すなわち

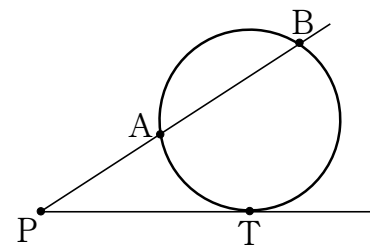
- ① 点 P を通る 2 直線が
 円とそれぞれ 2 点 A, B と 2 点 C, D で交わるとき

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



- ② 円外にある点 P を通る 2 直線が
 円と 2 点 A, B で交わり, 円と点 T で接するとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$



⑨ 注) 逆も成り立つ.

⑩ 考) ① $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ より $PA : PC = PD : PB$

よって $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

② $\triangle PAT \sim \triangle PTB$ より $PA : PT = PT : PB$

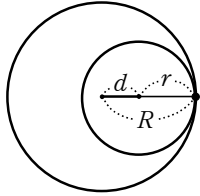
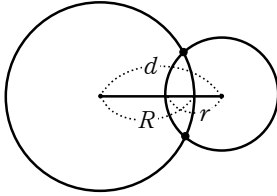
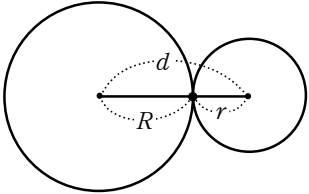
よって $PA \cdot PB = PT^2$

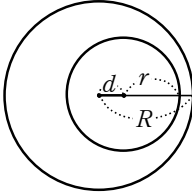
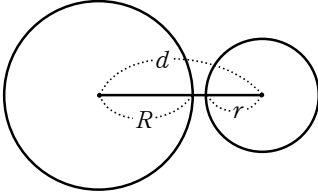
2つの円の位置関係

平面上に2つの円がある.

中心間の距離を d , 半径をそれぞれ R, r ($R > r$) として

2つの円の位置関係は次のようになる.

d と R, r	$d = R - r$	$R - r < d < R + r$	$d = R + r$
2つの円の位置関係	内接する (共有点1個)	異なる2点で交わる (共有点2個)	外接する (共有点1個)
グラフ			

d と R, r	$d < R - r$	$d > R + r$
2つの円の位置関係	内包する (共有点0個)	共有点をもたない (共有点0個)
グラフ		

$R = r$ のときも成り立つが「内接する」ことや「内包する」ことはない.

2つの円が共有点をもつ条件は $R - r \leq d \leq R + r$

⑨ 2つの円の位置関係は中心間の距離と2つの円の半径で決まる.

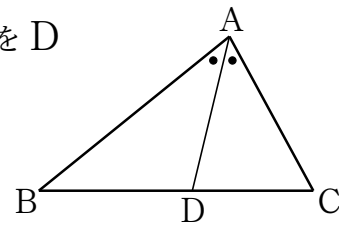
⑩ 2つの円が接するとき、接点は2つの円の中心を結ぶ直線上にある.

☆三角形の内角の二等分線と線分の関係

$\triangle ABC$ の $\angle A$ の内角の二等分線と対辺 BC との交点を D

とすると

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$



⑧ $\triangle ABC$ の外接円と直線 AD の交点のうち A 以外の点を E とする.

内角の二等分線より $\angle BAE = \angle CAD$

\widehat{AB} の円周角より $\angle ACB = \angle AEB$

2角が等しいことから $\triangle ABE \sim \triangle ADC$

これより $AB : AE = AD : AC$

すなわち $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

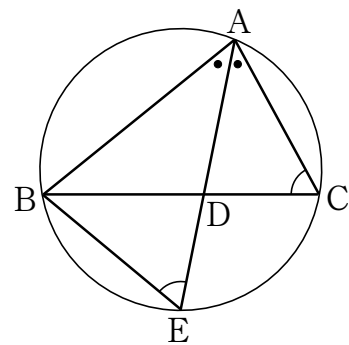
$AE = AD + DE$ であるから

$$AB \cdot AC = AD \cdot (AD + DE)$$

$$= AD^2 + AD \cdot DE$$

$$= AD^2 + BD \cdot DC \quad (\because \text{方べきの定理より } AD \cdot DE = BD \cdot DC)$$

よって $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

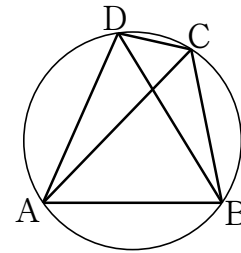


☆トレミーの定理

四角形 ABCD が円に内接するとき

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

つまり (向かい合う辺の積の和) = (対角線の積)



⑨ 逆も成り立つ.

⑩ (相似比を利用する)

線分 AC 上に $\angle CBD = \angle EBA = \alpha$ となる点 E をとる.

\widehat{BC} の円周角より $\angle BAE = \angle BDC$

2角が等しいことから $\triangle ABE \sim \triangle DBC$

これより $AB : AE = BD : DC$

すなわち $AE \cdot BD = AB \cdot CD \dots\dots ①$

$\angle DBE = \beta$ とおくと $\angle ABD = \angle CBE = \alpha + \beta$

\widehat{BC} の円周角より $\angle ADB = \angle ACB$

2角が等しいことから $\triangle ABD \sim \triangle EBC$

これより $AD : BD = EC : BC$

すなわち $EC \cdot BD = AD \cdot BC \dots\dots ②$

これらのことから

$$\begin{aligned} AC \cdot BD &= (AE + EC) \cdot BD \quad (\because AC = AE + EC) \\ &= AE \cdot BD + EC \cdot BD \\ &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \quad (\because ①, ②) \end{aligned}$$

