

# 数学 A 場合の数と確率 「場合の数」

~高校数学のまとめ~

## 有限集合と無限集合

- ① 要素の個数が有限である集合を ゆうげんしゅうごう 有限集合 という.
- ② 要素の個数が無限にある集合を むげんしゅうごう 無限集合 という.

- 例 ①  $\{x \mid x \text{ は } 3 \text{ 以下の自然数}\} = \{1, 2, 3\}$  は要素が 3 個で有限なので有限集合である.
- ②  $\{x \mid x \text{ は自然数}\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  は要素が無限にあるので無限集合である.

## 有限集合の要素の個数

有限集合の要素の個数を  $n(A)$  と表す.

とくに 空集合  $\emptyset$  は要素をもたないから  $n(\emptyset) = 0$

- 例  $A = \{x \mid x \text{ は } 3 \text{ 以下の自然数}\} = \{1, 2, 3\}$  は要素が 3 個なので,  $n(A) = 3$

## 2つの集合の和集合の要素の個数

有限集合  $A, B$  に対し

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

とくに  $A \cap B = \emptyset$  のときは

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

**★ 3 つの集合の和集合の要素の個数**

有限集合  $A, B, C$  に対し

$$n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

**補集合の要素の個数**

全体集合  $U$  とその部分集合  $A$  に対し

$$\boxed{1} \quad n(A) + n(\bar{A}) = n(U)$$

$$\boxed{2} \quad n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

**ド・モルガンの法則と集合の要素の個数**

全体集合  $U$  とその部分集合  $A, B$  に対し

$$\boxed{1} \quad n(\bar{A} \cap \bar{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$$

$$\boxed{2} \quad n(\bar{A} \cup \bar{B}) = n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B)$$

**場合の数**

ある事柄について、起こりうるすべての場合の総数を **場合の数** という。

**和の法則**

2つの事柄  $A$  と  $B$  について、これらは同時に起こらないとする。

$A$  の起こり方が  $a$  通り、 $B$  の起こり方が  $b$  通りあるとき

$A$  または  $B$  の起こる場合の数は  $a + b$  通り

これを **和の法則** という。

この法則は3つ以上の事柄についても同じように成り立つ。

**要**

基本的に「または」の結び、場合分けは **たし算**

**積の法則**

2つの事柄  $A$  と  $B$  について

$A$  の起こり方が  $a$  通りあり、その各々の起こり方に対して

$B$  の起こり方が  $b$  通り あるとき

$A$ ,  $B$  がともに起こる場合の数は  $a \times b$  通り

これを せき ほうそく **積の法則** という.

この法則は3つ以上の事柄についても同じように成り立つ.

**要**

基本的に「かつ」の結び、連続操作はかけ算

**数え上げの原則**

場合の数を求めるとき、次のような原則がある.

- ① 樹形図や表などを活用し、規則的に配列するなど工夫して数える
- ② ある原則を決め、その原則にしたがって整理して考える
- ③ 条件の強い所から考えて積の法則を利用する
- ④ 一度に数えきれないときは、場合分けをして和の法則を利用する
- ⑤ 直接数えるのが大変なときは、それ以外を考えて全体から引く

## 階乗

1 から  $n$  までの自然数の積を  $n$  の<sup>かいじょう</sup>階乗 といひ  $n!$  と表す.

つまり  $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

また 特別な場合として  $0! = 1$  と定める.

①  $0! = 1$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

$$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$$

## 階乗の変形

①  $n$  を自然数とするとき

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

②  $n$  を 2 以上の自然数とするとき

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$$

①  $5! = 5 \cdot 4!$

②  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3!$

順列

いくつかのものを <sup>じゅんじょ</sup> 順序を考えに入れて 1 列に並べたものを <sup>じゅんれつ</sup> 順列 という。  
 異なる  $n$  個のものから異なる  $r$  個を取り出して並べる順列を  
 $n$  個から  $r$  個取る順列 といい、その総数を  ${}_n P_r$  と表す。

⑧  ${}_n P_r$  の P は順列を意味する Permutation の頭文字である。

${}_n P_r$  の計算

$n$  を自然数,  $r$  を  $0 \leq r \leq n$  となる整数とするとき

$${}_n P_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r \text{ 個}}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

とくに

$$r = n \text{ のとき } {}_n P_n = n!$$

$$r = 0 \text{ のとき } {}_n P_0 = 1$$

⑨  ${}_7 P_3 = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}_{3 \text{ 個}} = \frac{7!}{4!} = 210$

円順列

いくつかのものを順序を考えに入れて円形に並べたものを <sup>えんじゆんれつ</sup>円順列 という。  
 回転して同じになるものは同じ並べ方とみなす。

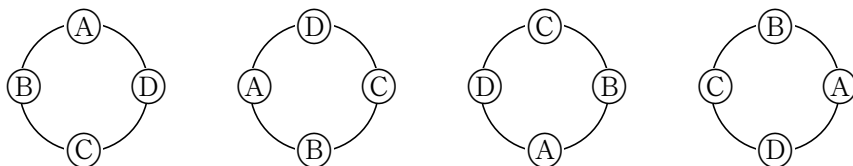
円順列の総数

異なる  $n$  個の円順列の総数は

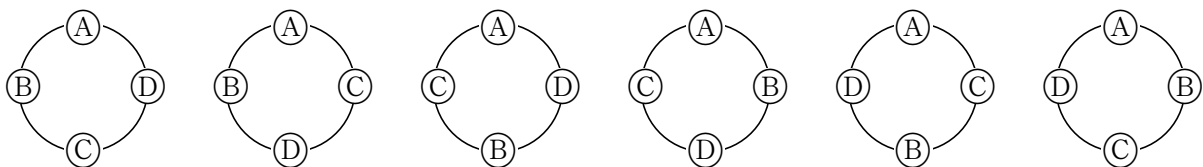
$$(n - 1)!$$

① 1 個を固定して残り  $(n - 1)$  個を並べることを考える。

② A, B, C, D の 4 人を円形に並べる総数について  
 次のような場合は回転すると同じになることに注意する。



そこで A を固定して残り B, C, D の 3 人を並べると次のようになる。



これらは回転しても同じにならないので円順列の総数になる。

よって 4 人のうち 1 人を固定して残り 3 人を並べることから

$$(4 - 1)! = 3! = 6 \text{ (通り)}$$



★数珠順列

いくつかのものを順序を考えに入れて数珠形に並べたものを  
 数珠順列 という。

回転,あるいは表裏をかえて同じになるものは同じ並べ方とみなす。

⑧ 数珠はペンダントやネックレスでも同じ。

★数珠順列の総数

異なる  $n$  個の数珠順列の総数は

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

⑨ まず円順列を考え,線対称になるものは表裏をかえると同じになるので 2 でわる。

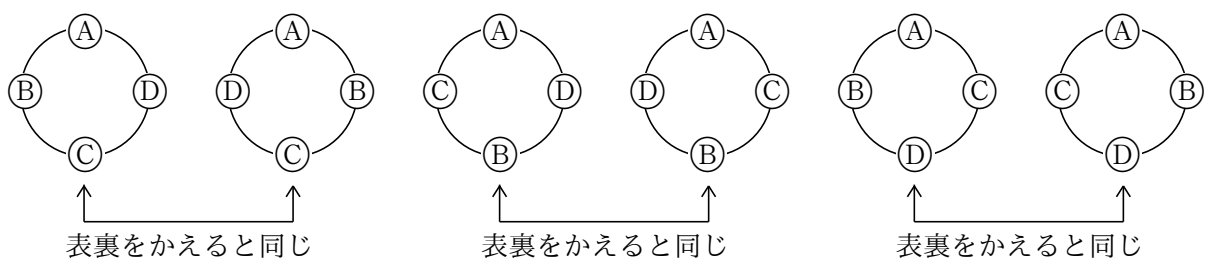
⑩ A, B, C, D の 4 個を数珠形に並べる総数について

まず A を固定して円形に並べると,下のようになら  $(4-1)! = 3! = 6$  (通り)

左の 2 つは ① と ③ を結ぶ直線に関して対称だから表裏をかえると同じ並べ方になる。

そのように 2 組ずつ同じ並べ方になる。

よって  $\frac{(4-1)!}{2} = 3$  (通り)



重複順列

異なる  $n$  個のものから、繰り返し用いることを許して

$r$  個を取って並べる順列を、 $n$  個から  $r$  個取る ちょうふくじゅんれつ 重複順列 という。

重複順列の総数

異なる  $n$  個から  $r$  個取る重複順列の総数は

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{r \text{ 個}} = n^r$$

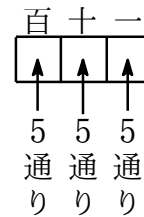
① 異なる 5 個から 3 個とる重複順列の総数は

$$\underbrace{5 \times 5 \times 5}_{3 \text{ 個}} = 5^3 = 125$$

② 1, 2, 3, 4, 5 の 5 個の数字から重複を許して 3 個の数字を取り出してつくられる 3 桁の整数の個数を求める。

百の位, 十の位, 一の位それぞれ 5 通りの決め方があるで

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125 \text{ (個)}$$



組合せ

いくつかのものを順序じゆんじよを考えに入れなくて取り出して1組にしたものをくみあわ組合せという。

異なる  $n$  個のものから異なる  $r$  個を取り出して作る組合せを  $n$  個から  $r$  個取る組合せといい、その総数を  ${}_nC_r$  と表す。

補  ${}_nC_r$  の C は組合せを意味する Combination の頭文字である。

${}_nC_r$  の計算

$n$  を自然数、 $r$  を  $0 \leq r \leq n$  となる整数とするとき

$$\begin{aligned} {}nC_r &= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r \text{ 個}}}{r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{{}_nP_r}{r!} \end{aligned}$$

とくに

$$r = n \text{ のとき } {}nC_n = 1$$

$$r = 0 \text{ のとき } {}nC_0 = 1$$

例  ${}_7C_3 = \frac{\overbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}^{3 \text{ 個}}}{3!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{{}_7P_3}{3!} = 35$

考 異なる  $n$  個のものから異なる  $r$  個取り出し、その  $r$  個を1列に並べる総数を考えて  ${}_nC_r \times r! = {}nP_r$

☆  ${}_n C_r$  の性質

①  $n$  を自然数,  $r$  を  $0 \leq r \leq n$  となる整数とするとき

$${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$$

②  $n$  を 2 以上の自然数,  $r$  を  $1 \leq r \leq n-1$  となる整数とするとき

$${}_n C_r = {}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r$$

例 ①  ${}_7 C_5 = {}_7 C_2$

②  ${}_7 C_2 = {}_6 C_1 + {}_6 C_2$

考 ① 異なる  $n$  個のものから異なる  $r$  個を取り出すことと

取り出さない異なる  $(n-r)$  個を選ぶ場合の数は同じである。

② 異なる  $n$  個のものから異なる  $r$  個を取り出す方法は  ${}_n C_r$  (通り)

これを特定の 1 個を含むか含まないかで場合分けして

Ⓐ 特定の 1 個を含む場合は 異なる  $(n-1)$  個から  $(r-1)$  個を選ぶから

$${}_{n-1} C_{r-1} \text{ (通り)}$$

Ⓑ 特定の 1 個を含まない場合は 異なる  $n-1$  個から  $r$  個を選ぶから

$${}_{n-1} C_r \text{ (通り)}$$

よって Ⓐ または Ⓑ より  ${}_n C_r = {}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r$

考 ② 
$$\begin{aligned} {}_n C_r &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{\{r + (n-r)\} \cdot (n-1)!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{r \cdot (n-1)!}{r \cdot (r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-r) \cdot (n-1)!}{r!(n-r) \cdot (n-r-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\ &= {}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r \end{aligned}$$

**★組合せの関係式**

$n, k$  を自然数,  $1 \leq k \leq n$  のとき

$$k {}_n C_k = n {}_{n-1} C_{k-1}$$

例)  $3 \cdot {}_7 C_3 = 7 \cdot {}_6 C_2$

考)  $n$  人から  $k$  人を選び, 代表者を 1 人決める方法は

$${}_n C_k \times {}_k C_1 = k {}_n C_k \text{ (通り) } \dots\dots \textcircled{1}$$

$n$  人から 1 人の代表者を決めて,  $(n-1)$  人から  $(k-1)$  人を選ぶ方法は

$${}_n C_1 \times {}_{n-1} C_{k-1} = n {}_{n-1} C_{k-1} \text{ (通り) } \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} = \textcircled{2}$  であるから  $k {}_n C_k = n {}_{n-1} C_{k-1}$

考)  $k {}_n C_k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$   
 $= k \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!}$   
 $= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$   
 $= n {}_{n-1} C_{k-1}$

同じものを含む 2 個の順列

$\underbrace{AA \cdots A}_{p \text{ 個}} \underbrace{BB \cdots B}_{q \text{ 個}}$  の  $(p + q)$  個の順列の総数は

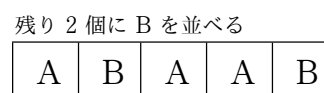
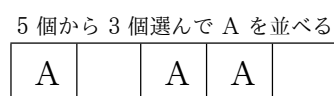
$${}_{p+q}C_p = {}_{p+q}C_q = \frac{(p + q)!}{p!q!}$$

⑧  $(p + q)$  個の場所を設定し、 $p$  個を選んで A を並べ、残りに  $q$  個の B を並べる。  
 あるいは、 $q$  個を選んで B を並べ、残りに  $p$  個の A を並べる。  
 また、 $(p + q)$  個をすべて異なるとして並べ、 $p$  個と  $q$  個の同じものの重複を考えて  $p!q!$  でわる。

⑨  $\underbrace{AAA}_{3 \text{ 個}} \underbrace{BB}_{2 \text{ 個}}$  の 5 個の順列の総数は

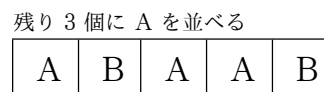
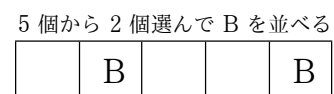
右図のように 5 個を並べる場所を設定し、  
 5 個から 3 個選んで 3 つの A を並べ、  
 残り 2 個に 2 つの B を並べることを考えて

$${}_5C_3 = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ (通り)}$$



⑩ 5 個から 2 個選んで 2 つの B を並べ、  
 残り 3 個に 3 つの A を並べることを考えて

$${}_5C_2 = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ (通り)}$$



⑪ 3 つの A、2 つの B を区別して  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2$  の 5 個を並べると

$$5! = 120 \text{ (通り)}$$

そのうち、例えば、 $B_1, B_2$  を入れかえた 2!(通り) の

$$A_1B_1A_2A_3B_2$$

$$A_1B_2A_2A_3B_1$$

について、どちらも ABAAB と同じ並べ方になる。

また、例えば、 $A_1, A_2, A_3$  を入れかえた 3!(通り) の

$$A_1B_1A_2A_3B_2$$

$$A_1B_1A_3A_2B_2$$

$$A_2B_1A_1A_3B_2$$

$$A_2B_1A_3A_1B_2$$

$$A_3B_1A_1A_2B_2$$

$$A_3B_1A_2A_1B_2$$

について、いずれもいずれも ABAAB と同じ並べ方になる。

よって、 $2! \times 3!$  (通り) は重複するので

$$\frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ (通り)}$$

⑫ 10 (通り) は次になる

- AAABB
- AABAB
- AABBA
- ABAAB
- ABABA
- ABBAA
- BAAAB
- BAABA
- BABAA
- BBAAA

同じものを含む3個の順列

$\underbrace{AA\cdots A}_{p\text{個}} \underbrace{BB\cdots B}_{q\text{個}} \underbrace{CC\cdots C}_{r\text{個}}$  の  $(p + q + r)$  個の順列の総数は

$${}_{p+q+r}C_p \cdot {}_{q+r}C_q = \frac{(p + q + r)!}{p!q!r!}$$

⑧  $(p + q + r)$  個の場所を設定し、 $p$  個を選んで A を並べ、残りの  $(p + r)$  個から  $q$  個を選んで B を並べ、残った  $r$  個には C を並べる。

また、 $(p + q + r)$  個をすべて異なるとして並べ、 $p$  個と  $q$  個と  $r$  個の同じものの重複を考慮して  $p!q!r!$  でわる。

⑨  $\underbrace{AAA}_{3\text{個}} \underbrace{BB}_{2\text{個}} \underbrace{CC}_{2\text{個}}$  の 7 個の順列の総数は  ${}_7C_3 \cdot {}_4C_2 = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$  (通り)

同じものを含む順列

同じものを含む順列の総数は次の手順で求めることができる。

- ① 全部異なるものとして順列の総数  $N$  を求める
- ②  $N$  を同じものの個数の階乗で割る

⑩  $\underbrace{AAA}_{3\text{個}} \underbrace{BB}_{2\text{個}} \underbrace{CCCC}_{4\text{個}} D$  の 10 個の順列の総数を求める。

① 10 個すべて異なるとして順列の総数を  $N$  とすると  $N = 10!$

② 3 個と 2 個と 4 個の同じものの重複を考慮して

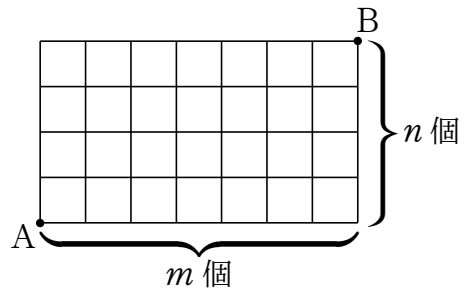
$$\frac{N}{3!2!4!} = \frac{10!}{3!2!4!} = 12600 \text{ (通り)}$$

平面での最短経路の総数

右図のように  $m \times n$  個のマスキの道があるとき

地点 A から地点 B への最短経路の総数は

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} = {}^{m+n}C_m = {}^{m+n}C_n$$

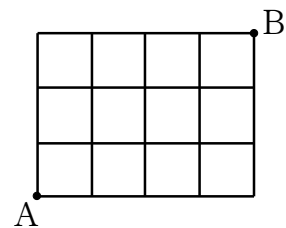


Ⓚ  $\underbrace{xx \cdots x}_{m \text{ 個}} \underbrace{yy \cdots y}_{n \text{ 個}}$  の  $(m+n)$  個の文字の順列として考える.

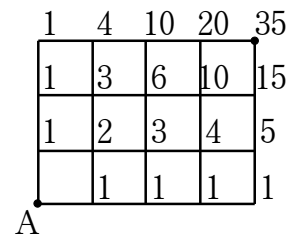
Ⓛ 地点 A から地点 B への最短距離で行く道順は  
右に 4 回上に 3 回移動することより  $\underbrace{xxxx}_{4 \text{ 個}} \underbrace{yyy}_{3 \text{ 個}}$  の

7 個の文字の順列に経路が対応する.

よって  ${}^7C_3 = \frac{7!}{4!3!} = 35$  (通り)



Ⓜ 場合の数を頂点の右上に直接書き込むと右のようになる.  
よって 35 (通り)





区別があるものの区別のない組への組分け

区別があるものの区別のない組への組分けの総数は

基本的に次のような手順で求めることができる。

- ① 組に区別があるとして組分けの総数  $N$  を求める
- ②  $N$  を組に区別がないと同じ組分けになる組数の階乗で割る

⊙ 同じものを含む順列と同じように考える。

組に区別があるとして組み分けをして、重複する組を考える。

⊙ 6個の異なるものを2個、2個、2個の3組に分ける総数は

$$\frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{3!} = \frac{90}{6} = 15 \text{ (通り)}$$

⊙  $a, b, c, d, e, f$  の6人を  $\underbrace{2人, 2人, 2人}_{3組}$  の3組に分ける総数について

① 3つの組をA組, B組, C組と区別したときの組み分けの総数を  $N$  とすると

A組は6人から2人を選んで  ${}_6C_2$  (通り)

B組はA組以外の4人から2人を選んで  ${}_4C_2$  (通り)

C組は残りの2人を選んで  ${}_2C_2$  (通り)

これより  $N = {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 = 15 \cdot 6 = 90$  (通り)

②  $N$  のうちA組, B組, C組を入れかえた  $3!$ (通り)の

A組	B組	C組
$a, b$	$c, d$	$e, f$
$a, b$	$e, f$	$c, d$
$c, d$	$a, b$	$e, f$
$c, d$	$e, f$	$a, b$
$e, f$	$a, b$	$c, d$
$e, f$	$c, d$	$a, b$

について、いずれも  $\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}$  の同じ組み分けになる。

よって、 $3!$ (通り)は重複するので

$$\frac{N}{3!} = \frac{90}{6} = 15 \text{ (通り)}$$

## 区別があるものの区別のある組への組分け

区別がある  $m$  個のものを区別のある  $n$  組への組分けの総数は

何もない組があってもよいならば

$$n^m$$

⑨ 異なる 6 個のものを 3 つの組 A, B, C に分ける方法は

1 個につき 3(通り) の分け方があるので

$$3^6 = 729 \text{ (通り)}$$

★重複組合せ

異なる  $n$  個のものから、繰り返し用いることを許して  $r$  個選ぶことを  
 $n$  個から  $r$  個選ぶ ちょうふくくみあわ 重複組合せ という。

★重複組合せの総数

異なる  $n$  個から  $r$  個選ぶ重複組合せの総数は

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$$

これは  $\underbrace{\circ\circ\cdots\circ}_{r \text{ 個}}, \underbrace{||\cdots|}_{(n-1) \text{ 個}}$  の順列の総数に等しい。

① {A, B, C, D} の 4 個から 2 個選ぶ重複組合せの総数は

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10 \text{ (通り)}$$

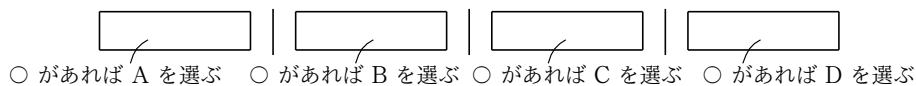
すべて書き出すと

- {A, A}, {B, B}, {C, C}, {D, D}, {A, B}  
 {A, C}, {A, D}, {B, C}, {B, D}, {C, D}

よって 10 (通り)

これは  $\underbrace{\circ\circ}_{2 \text{ 個}}, \underbrace{|||}_{3 \text{ 個}}$  の順列の総数に等しい。

なぜなら、「|」を仕切りとみて、3 つの仕切りで分けられた 4 つの部分に  
 A, B, C, D を選ぶ部分と考える。○の数だけ選ぶ、○がないときは選ばないとする。



選ぶもの	並べたもの
{A, A}	○○
{B, B}	○○
{C, C}	○○
{D, D}	○○
{A, B}	○ ○
{A, C}	○   ○
{A, D}	○     ○
{B, C}	○ ○
{B, D}	○   ○
{C, D}	○ ○

★区別がないものの区別のある組への組分け

区別のない  $m$  個のものを区別のある  $n$  組への組分けの総数は

① 何もない組があってもよいとき

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m \quad (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0)$$

を満たす整数の組  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の組数に等しい.

すなわち  ${}_nH_m = {}_{n+m-1}C_{n-1}$

② 何もない組があってはいけないとき

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m \quad (x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, \dots, x_n \geq 1)$$

を満たす整数の組  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の組数に等しい.

すなわち  ${}_{m-1}C_{n-1}$

④  $\underbrace{\circ \circ \circ \circ \circ \circ}_{m \text{ 個}}, \underbrace{|| \dots ||}_{n-1 \text{ 個}}$  の順列で,  $|$  で分けられた  $\circ$  の数を  $x_1, x_2, \dots, x_n$  に対応することを考える.

④ 例 6 つの球を 3 人で分ける総数について

① 何も分けられない人がいてもよいとき

3 人に分ける球の個数をそれぞれ  $x, y, z$  として

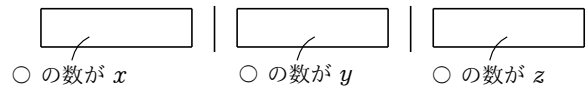
$$x + y + z = 6 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

を満たす整数の組  $(x, y, z)$  の組数に等しい.

これは 3 個のものから重複して 6 個選ぶ重複組み合わせ,

つまり,  $\underbrace{\circ \circ \circ \circ \circ \circ}_{6 \text{ 個}}, \underbrace{||}_{2 \text{ 個}}$  の順列より

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28 \text{ (通り)}$$



② 何も分けられない人がいないとき

3 人に分ける球の個数をそれぞれ  $x, y, z$  として

$$x + y + z = 6 \quad (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1)$$

を満たす整数の組  $(x, y, z)$  の組数に等しい.

これは 6 個の  $\circ$  の間  $\circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ$  の 5 か所の  $\wedge$  のうち 2 か所に  $|$  を入れる順列より

$${}_5C_2 = 10 \text{ (通り)}$$