数学Ｉ　図形と計量

~高校数学のまとめ~

□三平方の定理（ピタゴラスの定理）

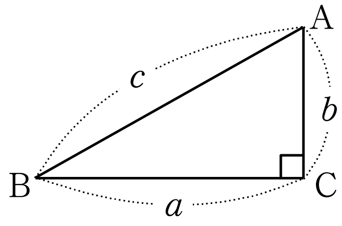
$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$，$\angle\mathrm{BCA}=90^\circ$

となる直角三角形 ABC において

$$a^2+b^2=c^2$$

つまり

（直角をはさむ 2 辺の長さの 2 乗の和）＝（斜辺の長さの 2 乗）



補 証明方法はたくさんある．

考（正方形の面積を 2 通りで表す）

右図のように考える．

一辺の長さが $a+b$ の正方形の面積は

△ABC の 4 つと一辺の長さが c の正方形

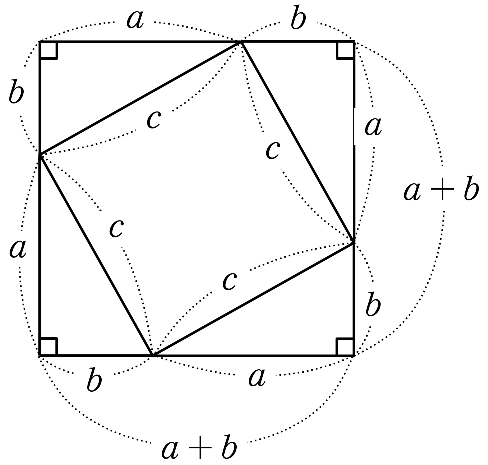
の面積の総和に等しい．

これより

$$(a+b)^2=\frac{1}{2}\cdot ab\times 4+c^2$$

すなわち　$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$

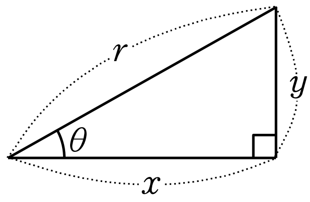
よって　$a^2+b^2=c^2$



三角比の定義

右図のように 3 つの辺の長さが x，y，r，1 つの角が θ

となる直角三角形において



$$\frac{x}{r}=\cos\theta,\quad \frac{y}{r}=\sin\theta,\quad \frac{y}{x}=\tan\theta$$

と表す．

$\boxed{1}$ $\cos\theta$ を θ の余弦（よげん） または コサイン（cosine） という．

$\boxed{2}$ $\sin\theta$ を θ の正弦（せいげん） または サイン（sine） という．

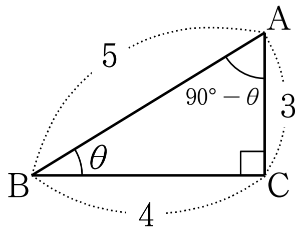
$\boxed{3}$ $\tan\theta$ を θ の正接（せいせつ） または タンジェント（tangent） という．

これらをまとめて 三角比（さんかくひ） という．

㊎ 右図の直角三角形において

$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

$\cos(90^\circ-\theta)=\dfrac{3}{5}$，$\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{4}{5}$，$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{4}{3}$



要

三角比とは 直角三角形の 2 つの辺の比の関係 を定義したもの．

話 高校数学では登場しないが， 上の直角三角形で

$$\frac{r}{x}=\sec\theta,\quad \frac{r}{y}=\csc\theta,\quad \frac{x}{y}=\cot\theta$$

と表す．

$\sec\theta$ を θ の正割（せいかつ） または セカント（secant）

$\csc\theta$ を θ の余割（よかつ） または コセカント（cosecant）

$\cot\theta$ を θ の余接（よせつ） または コタンジェント（cotangent）

というが，覚えなくても大丈夫．

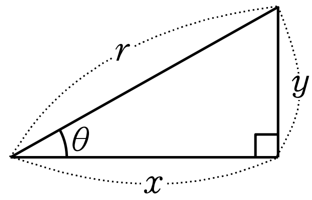
三角比と直角三角形の辺の長さ

右図のように

　3つの辺の長さが $x,\ y,\ r\ (x^2+y^2=r^2)$

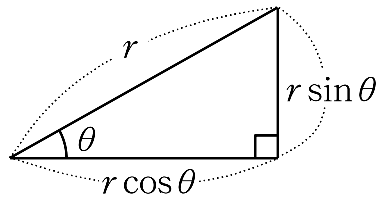
　1つの角の大きさが θ

となる直角三角形において



$\boxed{1}$ $x=r\cos\theta$

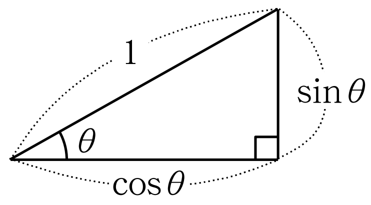
$\boxed{2}$ $y=r\sin\theta$



とくに $r=1$ とすると

$\boxed{1}$ $x=\cos\theta$

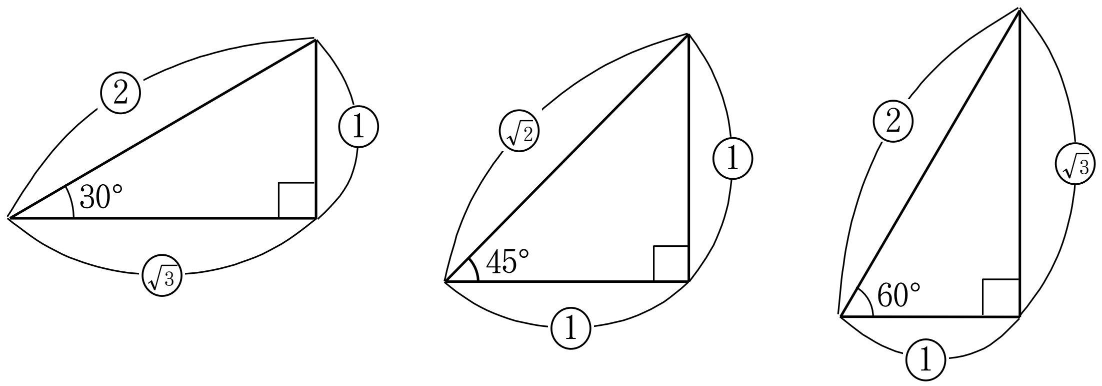
$\boxed{2}$ $y=\sin\theta$



r の値によらず

$\boxed{3}$ $y=(\tan\theta)x$

30°, 45°, 60° の三角比（三角定規の三角比）



θ	30°	45°	60°
$\cos\theta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$
$\sin\theta$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

三角比の相互関係

$\boxed{1}$ $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\boxed{2}$ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $(\cos\theta\fallingdotseq 0)$

$\boxed{3}$ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ $(\cos\theta\fallingdotseq 0)$

$\boxed{4}$ $\dfrac{1}{\tan^2\theta}+1=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ $(\sin\theta\fallingdotseq 0)$

考 $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ の両辺 $\cos^2\theta$ で割って

$$1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\boxed{2}$ より $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\boxed{4}$ $\boxed{1}$ の両辺 $\sin^2\theta$ で割って

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2+1=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$\boxed{2}$ より $\dfrac{1}{\tan^2\theta}+1=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

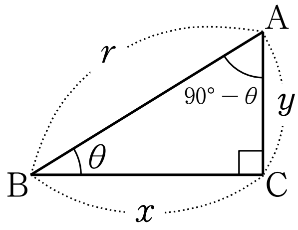
$90^\circ-\theta$ の三角比

$\boxed{1}$ $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\boxed{2}$ $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

$\boxed{3}$ $\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

考 右図の直角三角形において



$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

$\cos(90^\circ-\theta)=\dfrac{y}{r}$，$\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{x}{r}$，$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{x}{y}$

よって $\dfrac{y}{r}=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\dfrac{x}{r}=\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{\frac{y}{x}}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

別 $\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

例 $\boxed{1}$ $\cos 89^\circ=\sin 1^\circ$

$\boxed{2}$ $\sin 55^\circ=\cos 35^\circ$

$\boxed{3}$ $\tan 60^\circ=\dfrac{1}{\tan 30^\circ}$

座標を用いた三角比の定義

座標平面に原点Oを中心，半径1の半円上に定点A(1, 0)と動点Pをとる．

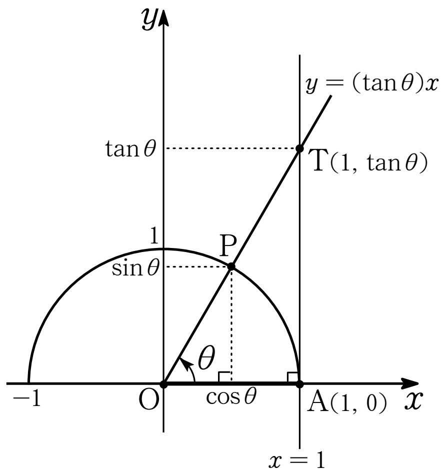
$\angle \mathrm{AOP} = \theta$ （$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$）として

点Pのx座標を$\cos\theta$，y座標を$\sin\theta$とする．

すなわち

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

と定義する．



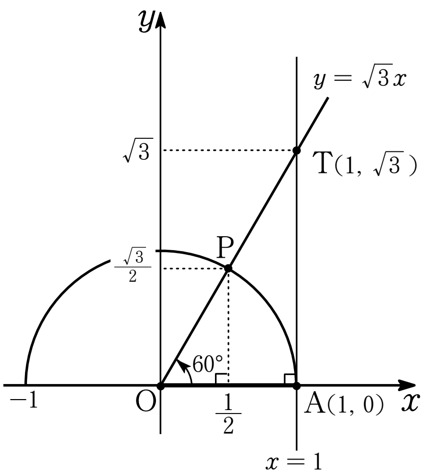
1 直線OPの傾きは $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

2 点Aにおける半円の接線 $x=1$ と

直線OP：$y=(\tan\theta)x$ の交点をTとすると $\mathrm{T}(1,\ \tan\theta)$

点Tのy座標は$\tan\theta$となる．

例 $\theta = 60^\circ$ のとき



点Pの座標は

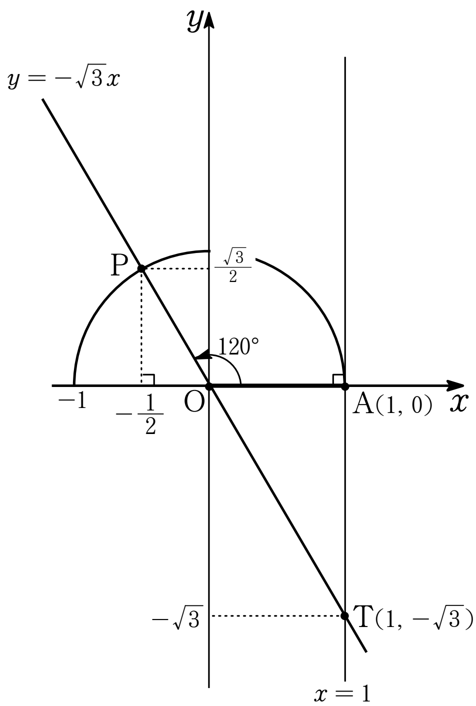
$$(\cos 60^\circ,\ \sin 60^\circ) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

これより $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

直線OPの傾きは $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

点Tの座標は $(1,\ \tan 60^\circ) = (1,\ \sqrt{3})$

$\theta = 120^\circ$ のとき



点Pの座標は

$$(\cos 120^\circ,\ \sin 120^\circ) = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

これより $\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$，$\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

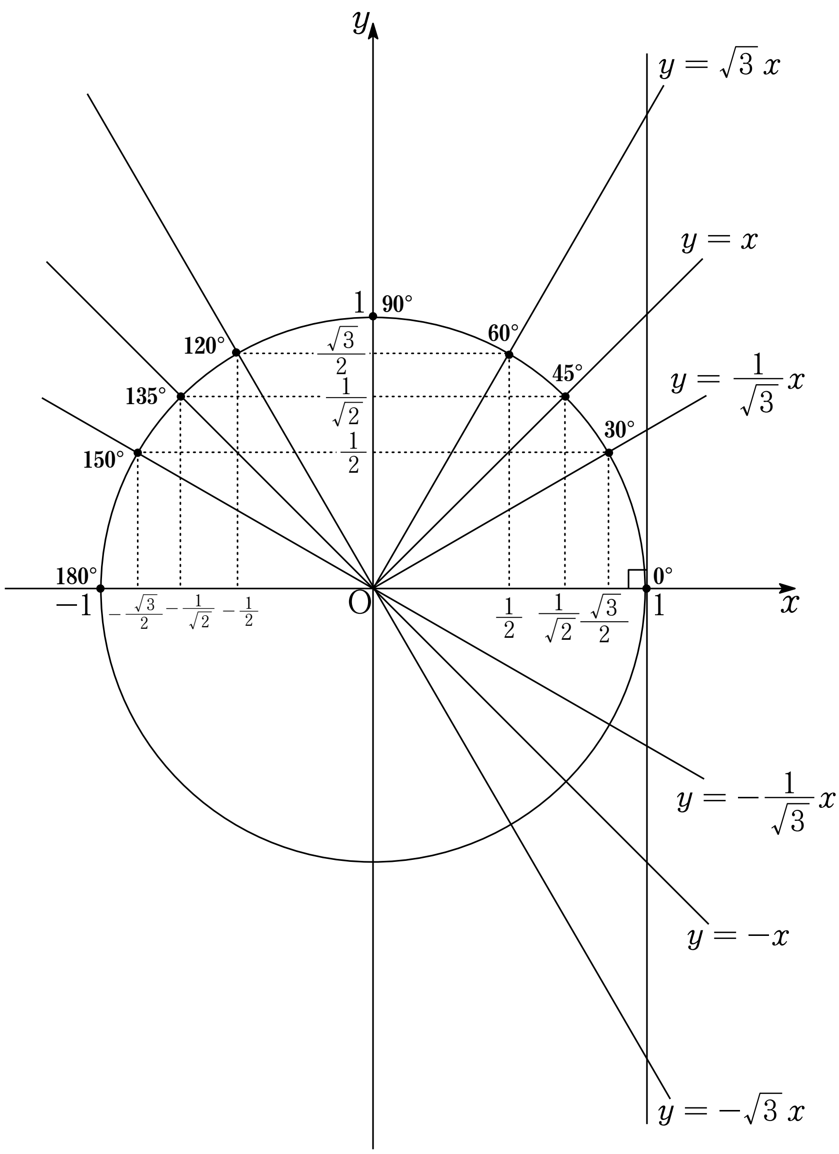
直線OPの傾きは $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

点Tの座標は $(1,\ \tan 120^\circ) = (1,\ -\sqrt{3})$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の有名角の三角比

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

考 右下図の円を考える．
角は円周上近くに書くことにしている．



180° − θ の三角比

1 $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

2 $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$

3 $\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$

考 右図において

A(1, 0)，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$，$\angle\mathrm{AOQ}=180^\circ-\theta$

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}\bigl(\cos(180^\circ-\theta),\ \sin(180^\circ-\theta)\bigr)$

このとき 点 B(−1, 0) とおくと $\angle\mathrm{BOQ}=\theta$

点 P と点 Q は y 軸に関して対称であるから

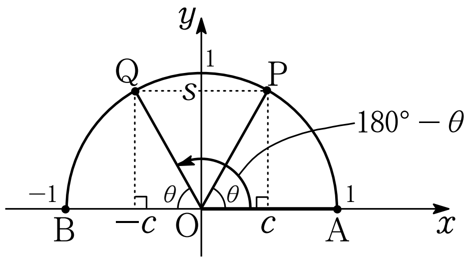
$\mathrm{P}(c,\ s)$ とすると $\mathrm{Q}(-c,\ s)$

よって

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$



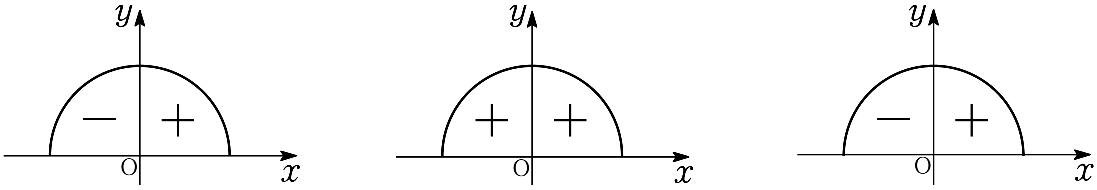
例 1 $\cos120^\circ=-\cos60^\circ$

2 $\sin130^\circ=\sin50^\circ$

3 $\tan140^\circ=-\tan40^\circ$

三角比の値の正負

〔$\cos\theta$ の正負〕　〔$\sin\theta$ の正負〕　〔$\tan\theta$ の正負〕



θ	0°	$0^\circ<\theta<90^\circ$	90°	$90^\circ<\theta<180^\circ$	180°
$\cos\theta$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin\theta$	0	$+$	1	$+$	0
$\tan\theta$	0	$+$	＼	$-$	0

㊟補 θ が鋭角（$0^\circ<\theta<90^\circ$）ならば　$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$，$\tan\theta>0$

㊟補 θ が鈍角（$90^\circ<\theta<180^\circ$）ならば　$\cos\theta<0$，$\sin\theta>0$，$\tan\theta<0$

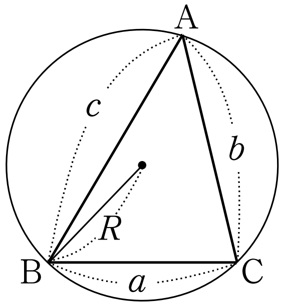
正弦定理

$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$，$\angle\mathrm{BAC}=A$，

$\angle\mathrm{ABC}=B$，$\angle\mathrm{BCA}=C$ となる $\triangle\mathrm{ABC}$ について

外接円の半径を R として

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



㊓ 証明方法はいろいろある．

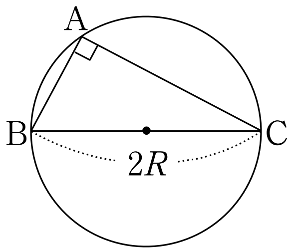
㊔ $A=\theta$ とし $\dfrac{a}{\sin\theta}=2R$ が成り立つことを示す．

Ⓐ $\theta=90^\circ$ のとき

BC が外接円の直径になるので $\mathrm{BC}=2R$

$$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{a}{\sin 90^\circ}=a$$
$$2R=\mathrm{BC}=a$$

ゆえに $\dfrac{a}{\sin\theta}=2R$



Ⓘ $0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき

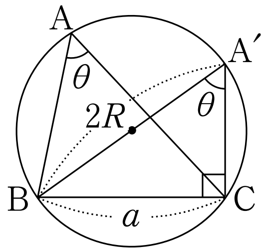
円上に BA′ が直径となるように点 A′ をとると $\angle\mathrm{BCA'}=90^\circ$

円周角の定理から $\angle\mathrm{BA'C}=\angle\mathrm{BAC}=\theta$

$\triangle\mathrm{BA'C}$ で三角比を考えて

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA'}}\quad すなわち\quad \sin\theta=\frac{a}{2R}$$

ゆえに $\dfrac{a}{\sin\theta}=2R$



Ⓤ $90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき

$0^\circ<180^\circ-\theta<90^\circ$

円上に BD が直径となるように点 D をとると $\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$

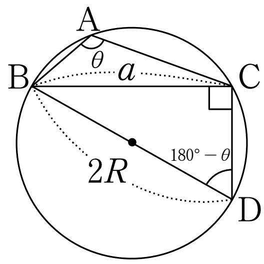
四角形 ABDC は円に内接するから $\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{BDC}=180^\circ$

これより $\angle\mathrm{BDC}=180^\circ-\theta$

$\triangle\mathrm{BDC}$ で三角比を考えて

$$\sin(180^\circ-\theta)=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}}\quad すなわち\quad \sin\theta=\frac{a}{2R}$$

ゆえに $\dfrac{a}{\sin\theta}=2R$



Ⓐ，Ⓘ，Ⓤ より $\dfrac{a}{\sin\theta}=2R$ が示された．

$B=\theta$，$C=\theta$ としても同様である．

よって $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ は示された．

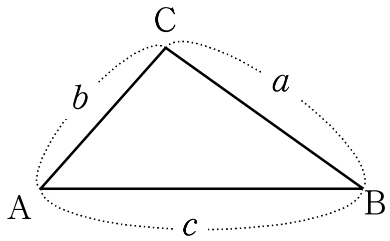
余弦定理

BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$，∠BAC $= A$，∠ABC $= B$，∠BCA $= C$ となる △ABC について，3 辺の長さと余弦の関係が次のように成り立つ．

$\boxed{1}$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



$\boxed{2}$ $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

考（三平方の定理を考える）

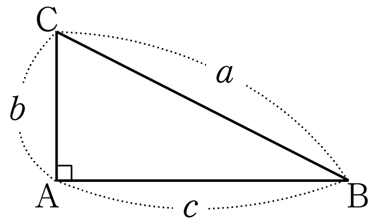
$A = \theta$ とし　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$　を示す．

あ $\theta = 90°$ のとき

三平方の定理から　$a^2 = b^2 + c^2$

ここで　$\cos\theta = \cos 90° = 0$

ゆえに　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$



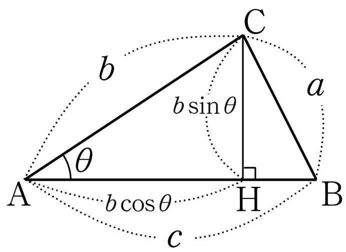
い $0° < \theta < 90°$ のとき

点 C から直線 AB へ垂線 CH を下ろすと

$\mathrm{CH} = b\sin\theta$

$\mathrm{AH} = b\cos\theta$

$\mathrm{BH} = |\mathrm{AB} - \mathrm{AH}| = |c - b\cos\theta|$



△BCH に三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned} a^2 = \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^2 \\ &= |c - b\cos\theta|^2 + (b\sin\theta)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos\theta + b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta \quad (\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1) \end{aligned}$$

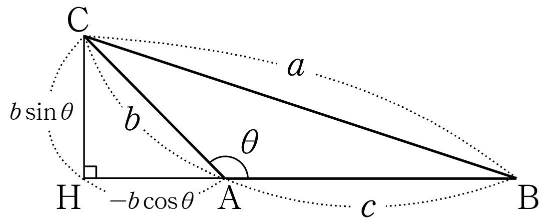
う $90° < \theta < 180°$ のとき

点 C から直線 AB へ垂線 CH を下ろすと

$\mathrm{CH} = b\sin\theta$

$\mathrm{AH} = -b\cos\theta$

$\mathrm{BH} = |\mathrm{AB} + \mathrm{AH}| = |c - b\cos\theta|$



△BCH に三平方の定理を用いて い と同様．

あ，い，う より　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$

変形して　$\cos\theta = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$B = \theta$，$C = \theta$ としても同様に示せる．

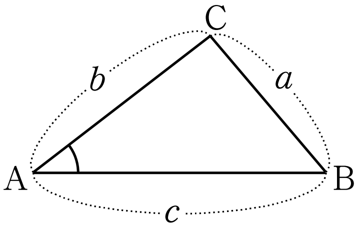
三角形の面積

BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$，∠BAC $= A$，∠ABC $= B$ ∠BCA $= C$ となる △ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$S = \frac{1}{2}ca\sin B$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$



㊫（三平方の定理を考える）

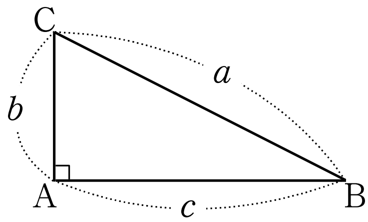
$A = \theta$ とし $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\theta$ を示す.

㋐ $\theta = 90°$ のとき

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA} = \frac{1}{2}bc$$

ここで $\sin\theta = \sin 90° = 1$

ゆえに $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\theta$



㋑ $0° < \theta < 90°$ のとき

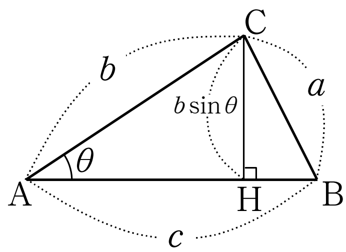
点 C から直線 AB へ垂線 CH を下ろすと

$$\mathrm{CH} = b\sin\theta$$

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH}$$

$$= \frac{1}{2}c\cdot b\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}bc\sin\theta$$



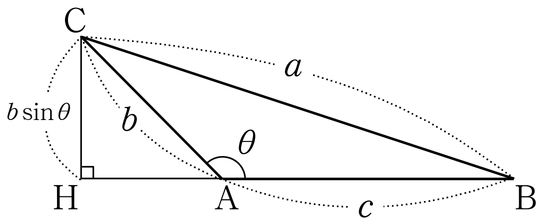
㋒ $90° < \theta < 180°$ のとき

点 C から直線 AB へ垂線 CH を下ろすと

$$\mathrm{CH} = b\sin\theta$$

㋑ と同様にして

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\theta$$



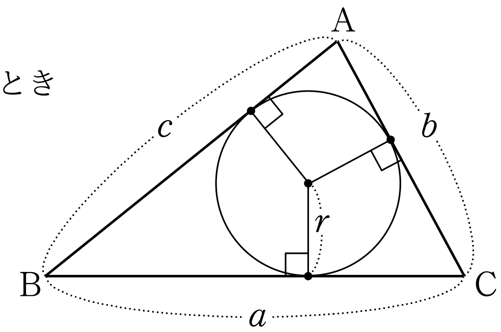
㋐，㋑，㋒ より $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\theta$

$B = \theta$，$C = \theta$ としても同様である.

三角形の内接円の半径

△ABC は BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とする．

△ABC の面積を S，内接円の半径を r とするとき



$\boxed{1}$ $S = \dfrac{r}{2}(a + b + c)$

$\boxed{2}$ $r = \dfrac{2S}{a + b + c}$

つまり

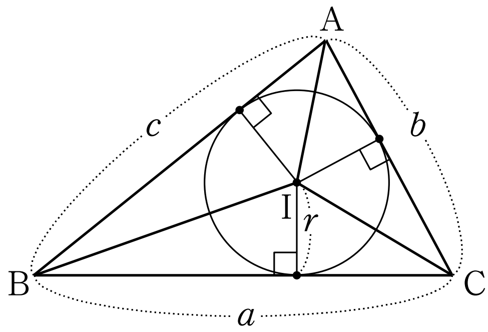
$$(\text{内接円の半径}) = \frac{2 \times (\text{三角形の面積})}{(3\text{辺の長さの和})}$$

考 $\boxed{1}$ 内接円の中心を I として，面積の関係から

△ABC ＝ △IBC ＋ △ICA ＋ △IAB

すなわち

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2}(a + b + c)$$



$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ を変形して $r = \dfrac{2S}{a + b + c}$

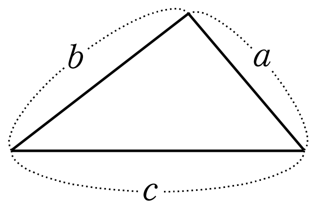
★三角形の面積（ヘロンの公式）

3辺の長さが a，b，c となる三角形の面積を S とすると

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

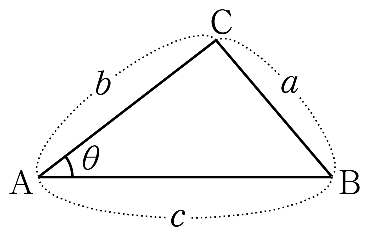
として

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



㊂ $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とする．

余弦定理から　$\cos\theta=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　……①



$S=\dfrac{1}{2}bc\sin\theta$ が成り立つことから2乗して

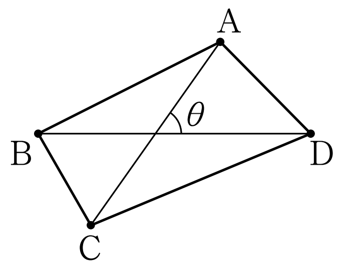
$$\begin{aligned}
S^2&=\frac{1}{4}(bc)^2\sin^2\theta\\
&=\frac{1}{4}(bc)^2(1-\cos^2\theta)\\
&=\frac{1}{4}(bc)^2(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\\
&=\frac{1}{4}(bc)^2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\ (\because ①)\\
&=\frac{1}{4}(bc)^2\cdot\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\\
&=\frac{1}{4}(bc)^2\frac{\{(b^2+2bc+c^2)-a^2\}\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}}{4(bc)^2}\\
&=\frac{1}{16}\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}\\
&=\frac{1}{16}\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}\\
&=\frac{1}{2^4}(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)\\
&=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c-2a}{2}\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}\cdot\frac{a+b+c-2b}{2}\\
&=\frac{a+b+c}{2}\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)\\
&=s(s-a)(s-b)(s-c)\ \left(\because s=\frac{a+b+c}{2}\right)
\end{aligned}$$

よって　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

☆凸四角形の面積

凸四角形 ABCD の面積を S とする.
2 つの対角線 AC，BD のなす角を θ ($0° < \theta < 180°$)
とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} \cdot \sin\theta$$



㊟ 2 つの対角線 AC と BD の交点を O，$\angle\mathrm{AOD} = \theta$ とする.

点 A を通り線分 BD に平行な直線を ℓ_A
点 C を通り線分 BD に平行な直線を ℓ_C
点 B を通り線分 AC に平行な直線を m_B
点 D を通り線分 AC に平行な直線を m_D

として

ℓ_A と m_B の交点を P，ℓ_C と m_B の交点を Q
ℓ_C と m_D の交点を R，ℓ_A と m_D の交点を T

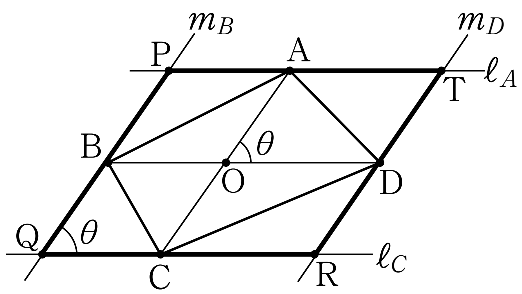
とすると

PQ // AC // TR，PT // BD // QR

なので

四角形 PQRT，四角形 OAPB，四角形 OBQC，四角形 OCRD，四角形 ODTA

はすべて平行四辺形である.



$\triangle\mathrm{OAB} \equiv \triangle\mathrm{PAB}$，$\triangle\mathrm{OBC} \equiv \triangle\mathrm{QBC}$，$\triangle\mathrm{OCD} \equiv \triangle\mathrm{RCD}$，$\triangle\mathrm{ODA} \equiv \triangle\mathrm{TDA}$

となるので，平行四辺形 PQRT の面積は

$$2 \times (\triangle\mathrm{OAB} + \triangle\mathrm{OBC} + \triangle\mathrm{OCD} + \triangle\mathrm{ODA}) = 2S \quad \cdots\cdots①$$

また $\angle\mathrm{PQR} = \angle\mathrm{AOD} = \theta$ であるから，平行四辺形 PQRT の面積は

$$\begin{aligned} 2 \times \triangle\mathrm{PQR} &= 2 \times \frac{1}{2} \cdot \mathrm{PQ} \cdot \mathrm{QR} \cdot \sin\theta \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} \cdot \sin\theta \quad (\because \mathrm{PQ} = \mathrm{AC},\ \mathrm{QR} = \mathrm{BD}) \\ &= \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} \cdot \sin\theta \quad \cdots\cdots② \end{aligned}$$

① = ② として　$2S = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} \cdot \sin\theta$　すなわち　$S = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD} \cdot \sin\theta$

$\angle\mathrm{AOB} = \theta$，$\angle\mathrm{BOC} = \theta$，$\angle\mathrm{COD} = \theta$ としても同様である.

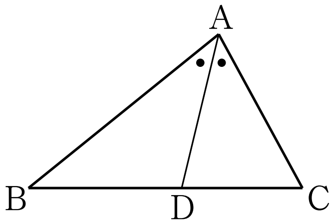
内角の二等分線と比

△ABC の ∠A の内角の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

点 D は線分 BC を AB : AC に内分する．

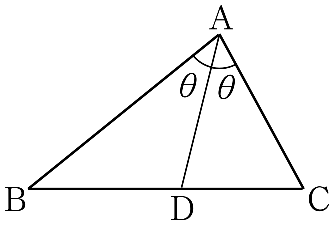
すなわち

$$AB : AC = BD : DC$$



㊟ 逆も成り立つ．

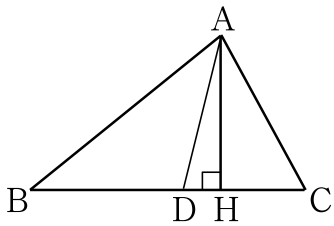
㊫（面積比を考える）



$\angle ABD = \angle CAD = \theta$ とする．

面積比から $\dfrac{\triangle ABD}{\triangle CAD} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\sin\theta}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\sin\theta} = \dfrac{AB}{AC}$ ……①

また，点 A から直線 BC へ垂線 AH を下ろすと



面積比から $\dfrac{\triangle ABD}{\triangle CAD} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AH}{\frac{1}{2}\cdot DC\cdot AH} = \dfrac{BD}{DC}$ ……②

① = ② として $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$ すなわち $AB : AC = BD : DC$

㊧ AB = AC のとき

△ABC は二等辺三角形となり BD = DC であるから $AB : AC = BD : DC = 1 : 1$

★外角の二等分線と比

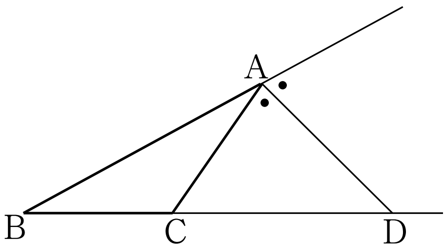
AB ≠ AC とする.

△ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とすると

点 D は線分 BC を AB : AC に外分する.

すなわち

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$$

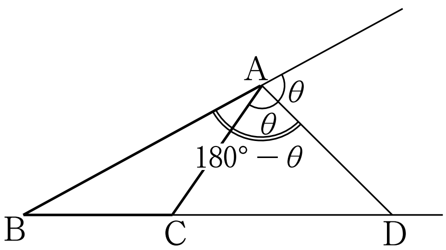


㊟ 逆も成り立つ.

㊫ (面積比を考える)

外角を二等分したそれぞれの角を θ とおくと $\angle\mathrm{BAD} = 180° - \theta$, $\angle\mathrm{CAD} = \theta$

面積比から $$\frac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{CAD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin(180° - \theta)}{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin\theta} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \quad \cdots\cdots①$$



また, 点 A から直線 BC へ垂線 AH を下ろすと

面積比から $$\frac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{CAD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AH}}{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DC}\cdot\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \quad \cdots\cdots②$$

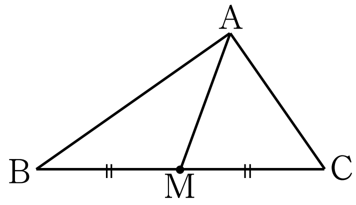
① = ② として $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$ すなわち $\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$

㊓ AB = AC のとき, ∠A の外角の二等分線は辺 BC と平行になり, 点 D は存在しない.

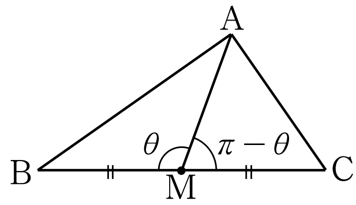
★中線定理（パップスの定理）

$\triangle$ABC の辺 BC の中点を M とすると

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$



考 $\angle\mathrm{AMB}=\theta$ とおくと $\angle\mathrm{AMC}=\pi-\theta$



$\triangle$ABM，$\triangle$ACM にそれぞれ余弦定理を用いて

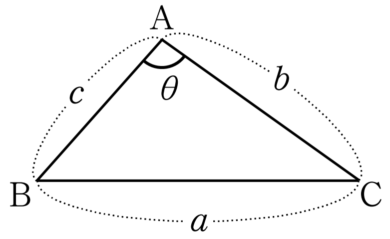
$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2-2\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}\cdot\cos\theta \quad \cdots\cdots①$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\mathrm{AM}^2+\mathrm{CM}^2-2\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{CM}\cdot\cos(\pi-\theta)\\&=\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2+2\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}\cdot\cos\theta \quad \cdots\cdots②\end{aligned}$$

よって ①＋② として $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$

三角形の内角が鋭角・直角・鈍角になる条件

BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$，$\angle$BAC $= \theta$ とする $\triangle$ABC において



1 θ が 鋭角 $\iff$ $b^2 + c^2 > a^2$

2 θ が 直角 $\iff$ $b^2 + c^2 = a^2$

3 θ が 鈍角 $\iff$ $b^2 + c^2 < a^2$

考 余弦定理を用いて $\cos\theta = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

1 θ が鋭角 $\iff \cos\theta > 0 \iff b^2 + c^2 - a^2 > 0$

2 θ が直角 $\iff \cos\theta = 0 \iff b^2 + c^2 - a^2 = 0$（三平方の定理）

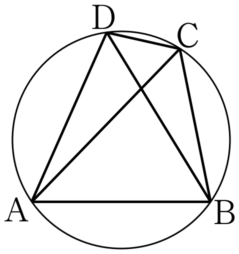
3 θ が鈍角 $\iff \cos\theta < 0 \iff b^2 + c^2 - a^2 < 0$

★トレミーの定理

四角形 ABCD が円に内接するとき

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

つまり（向かい合う辺の積の和）＝（対角線の積）

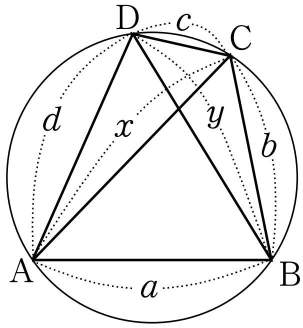


㊟ 逆も成り立つ．

㊫（余弦定理を使う）

$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BC}=b$，$\mathrm{CD}=c$，$\mathrm{DA}=d$，$\mathrm{AC}=x$，$\mathrm{BD}=y$ とする．

△ABD，△BAC，△CBD，△DAC にそれぞれ余弦定理を用いて



$$\cos A=\frac{a^2+d^2-y^2}{2ad} \quad \cdots\cdots①$$

$$\cos B=\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab} \quad \cdots\cdots②$$

$$\cos C=\frac{b^2+c^2-y^2}{2bc} \quad \cdots\cdots③$$

$$\cos D=\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd} \quad \cdots\cdots④$$

四角形 ABCD が円に内接することより $A+C=\pi$ であるから

$$\cos A=\cos(\pi-C)=-\cos C$$

①，③ より

$$\frac{a^2+d^2-y^2}{2ad}=-\frac{b^2+c^2-y^2}{2bc}$$

両辺 $2abcd$ をかけて

$$bc(a^2+d^2-y^2)=-ad(b^2+c^2-y^2)$$

これより

$$(ad+bc)y^2=bca^2+d(b^2+c^2)a+bcd^2$$

$$\therefore\ y^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc} \quad \cdots\cdots⑤$$

同様に $B+D=\pi$ であるから

$$\cos B=\cos(\pi-D)=-\cos D$$

②，④ より

$$\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}=-\frac{d^2+c^2-x^2}{2cd}$$

⑤ で b と d，y と x をそれぞれ入れかえることを考えて

$$x^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} \quad \cdots\cdots⑥$$

⑤×⑥ として

$$x^2y^2=\frac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)^2}{(ad+bc)(ab+cd)}$$

すなわち $(xy)^2=(ac+bd)^2$

$xy>0$，$ac+bd>0$ であるから $xy=ac+bd$

よって $\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$

□円の周の長さと面積

半径 r の円 について

1 周の長さを ℓ とすると

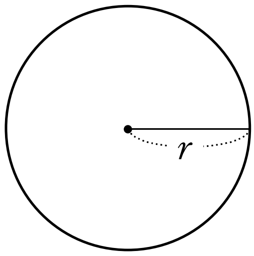
$$\ell = 2\pi r$$

つまり（円周の長さ）＝（直径）× π

2 面積を S とすると

$$S = \pi r^2$$

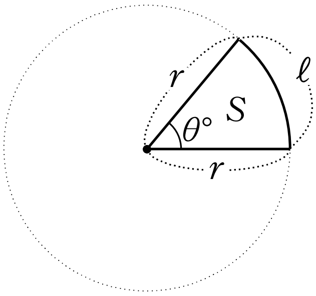
つまり（円の面積）＝（半径）$^2 \times \pi$



㊫ 円周率 $\pi = \dfrac{（円周の長さ）}{（直径）}$

□扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ° の扇形（おうぎ）形 について



$\boxed{1}$ 弧の長さを ℓ とすると

$$\ell = 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$$

$\boxed{2}$ 面積を S とすると

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{360} \quad \text{または} \quad S = \frac{1}{2} r\ell$$

㊫ 半径が同じ円の扇形の弧の長さや面積は，中心角に比例する．

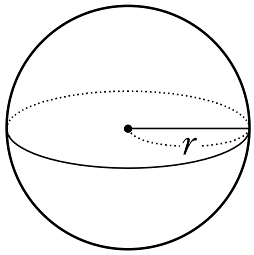
㊮ 半径が 2，中心角が 60° の扇形の弧の長さを ℓ，面積を S とすると

$\boxed{1}$ 弧の長さは $\ell = 2\pi \cdot 2 \times \frac{60}{360} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$

$\boxed{2}$ 面積は $\pi \cdot 2^2 \times \frac{60}{360} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$

□球の表面積と体積

半径 r の球 について



1 表面積を S とすると

$$S=4\pi r^2$$

2 体積を V とすると

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{または} \quad V=\frac{1}{3}rS$$

例 半径が 3 の球について

1 表面積は $4\pi\cdot 3^2=\boldsymbol{36\pi}$

2 体積は $\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=\boldsymbol{36\pi}$

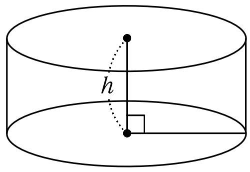
□柱体の体積

底面積が S，高さが h の 柱体（ちゅうたい）(円柱，三角柱，四角柱など)

の体積を V とすると

$$V = Sh$$

つまり（柱体の体積）＝（底面積）×（高さ）



（図は円柱）

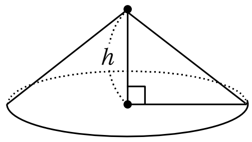
□錐体の体積

底面積が S，高さが h の 錐体（すいたい）(円錐，三角錐，四角錐など)

の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

つまり（錐体の体積）＝（柱体の体積）× $\frac{1}{3}$



（図は円錐）

□相似と面積比

平面上で相似比が $a:b$ となる 2 つの図形の面積比は $a^2:b^2$

□相似と表面積比，体積比

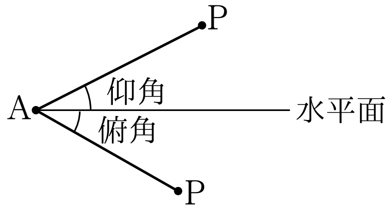
空間内で相似比が $a:b$ となる 2 つの立体について

$\boxed{1}$ 表面積比は $a^2:b^2$

$\boxed{2}$ 体積比は $a^3:b^3$

仰角・俯角

測量などで，点 A から点 P をみるとき，A を通る水平面と AP のなす角について



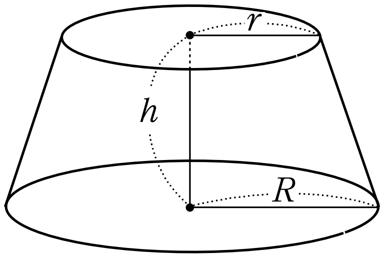
$\boxed{1}$ P が水平面より上にあるならば **仰角**（ぎょうかく）という.

$\boxed{2}$ P が水平面より下にあるならば **俯角**（ふかく）という.

★円錐台の体積

上面の円の半径が r，下面の円の半径が R，高さが h の円錐台の体積を V とすると

$$V=\frac{\pi h}{3}\left(r^2+rR+R^2\right)$$

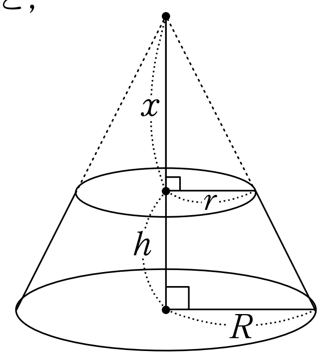


㊫ $r<R$ のとき

右図のように底面の半径が r，高さが x の円錐を設定すると，相似比を考えて

$x:r=(x+h):R$　すなわち　$r(x+h)=xR$

これより　$x=\dfrac{rh}{R-r}$　……①

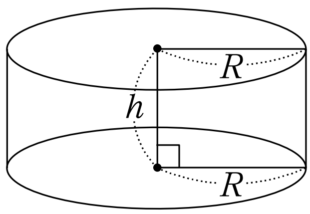


$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\pi R^2(x+h)-\frac{1}{3}\pi r^2x\\&=\frac{\pi}{3}\left\{(R^2-r^2)x+R^2h\right\}\\&=\frac{\pi}{3}\left\{(R+r)(R-r)\frac{rh}{R-r}+R^2h\right\}\quad(\because ①)\\&=\frac{\pi h}{3}(r^2+rR+R^2)\end{aligned}$$

$r>R$ のときも同様である．

$r=R$ のときは半径 R，高さが h の円錐であり

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi h}{3}(R^2+R\cdot R+R^2)\\&=\frac{\pi h}{3}\cdot 3R^2\\&=\pi R^2h\end{aligned}$$



㊫ $r=R$ のときは円柱の体積になる．