

# 数学 I 2次関数

~高校数学のまとめ~

## □関数

2つの変数  $x$ ,  $y$  があって

$x$  の <sup>あた</sup>値を定めると それに応じて  $y$  の値がただ1つだけ定まることを

$y$  は  $x$  の <sup>かんすう</sup>関数 という。

①  $y = 2x$  の関係は  $x = 1$  とすると  $y = 2$  と  $y$  の値がただ1つだけ定まる。

$x$  の値を定めると  $y$  の値が1つだけ定まるので「 $y$  は  $x$  の関数」である。

②  $y^2 = x$  の関係は  $x = 1$  とすると  $y^2 = 1$  であるから  $y = \pm 1$

これは  $y$  の値が2つ決まり、 $y$  がただ1つ決まらないので「 $y$  は  $x$  の関数」ではない。

例題 次の中で  $y$  が  $x$  の関数となるものをすべて選べ。

①  $y = -x$

②  $x^2 + y^2 = 1$

③ 半径が  $x$  cm の円の面積  $y$  cm<sup>2</sup>

解 ①, ③

**定義域と値域**

$y$  が  $x$  の関数であるとき

① 変数  $x$  のとりうる値の範囲を

ていぎいき  
定義域 または  $x$  の へんいき  
変域 という。

②  $x$  が定義域全体を動くとき変数  $y$  がとる値の範囲を

ちいき  
値域 または  $y$  の へんいき  
変域 という。

⑧ 関数  $y = 2x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) について

① 定義域は  $0 \leq x \leq 1$

② 定義域  $0 \leq x \leq 1$  全体を  $x$  が動くときの  $y$  のとる値の範囲は  $0 \leq y \leq 2$

値域は  $0 \leq y \leq 2$

**例題**  $y$  は  $x$  関数で  $y = 5x$  ( $1 \leq x \leq 2$ ) とする,  
このとき, 定義域と値域をそれぞれ求めよ。

⑨ 定義域は  $1 \leq x \leq 2$ , 値域は  $5 \leq y \leq 10$

## 関数の表記

$y$  が  $x$  の関数であることを  $y = f(x)$  と表す.

関数  $y = f(x)$  において,  $x$  の値  $a$  に対応して定まる  $y$  の値を  $f(a)$  で表し

$x = a$  のときの関数  $f(x)$  の値という.

① 関数  $y = 2x + 1$  について  $f(x) = 2x + 1$  として  $y = f(x)$  と表せる.

$x = a$  のとき  $y = 2a + 1$  であることは  $f(a) = 2a + 1$

$x = 1$  のとき  $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$  であることは  $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$x = -1$  のとき  $y = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$  であることは  $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$

例題  $x$  の関数  $f(x) = 3x^2 + 1$  について,  $f(2)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(a)$  の値をそれぞれ求めよ.

解  $f(2) = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13$

$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4$

$f(a) = 3a^2 + 1$

座標平面

平面上に直交する2つの座標軸ざひょうじくを定めると

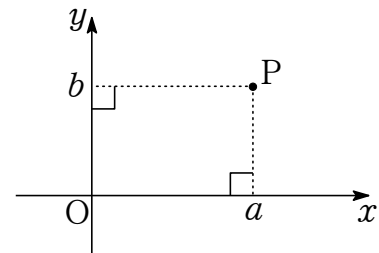
その平面上の点 P の位置は右の下の図のように2つの実数の組  $(a, b)$  で表される。

これを点 P の座標ざひょうといい  $P(a, b)$  とかく。

また 座標軸の交点を原点げんてん といひ  $O(0, 0)$  とかく。

座標軸の定められた平面を座標平面ざひょうへいめん という。

とくに何も条件がないとき、座標平面の座標軸は  $x$  軸,  $y$  軸として考える。



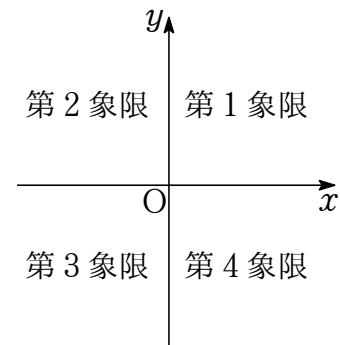
座標平面の象限

座標平面を座標軸により4つの部分に分けて、次のようにいう。

- ①  $\{(x, y) \mid x > 0 \text{ かつ } y > 0\}$  を第1象限しょうげん
- ②  $\{(x, y) \mid x < 0 \text{ かつ } y > 0\}$  を第2象限
- ③  $\{(x, y) \mid x < 0 \text{ かつ } y < 0\}$  を第3象限
- ④  $\{(x, y) \mid x > 0 \text{ かつ } y < 0\}$  を第4象限

ただし

$\{(x, y) \mid x = 0 \text{ または } y = 0\}$  (座標軸) はどの象限にも含まれない。



例題 座標平面で点  $(-3, 2)$  は第何象限にあるか。

解 点  $(-3, 2)$  は第2象限にある。

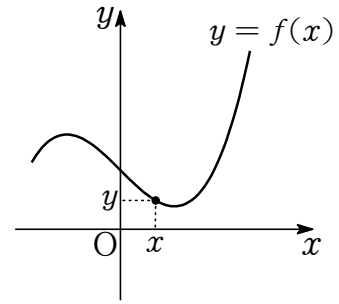
**関数のグラフ**

関数  $y = f(x)$  について

$\{(x, y) \mid y = f(x)\}$  の点全体からなる図形を

座標平面に表したものを

関数  $y = f(x)$  の **グラフ** という.



定数関数

関数  $y = f(x)$  について

- ① どのように  $x$  の値を定めても,  $y$  が一定の値をとる
- ② 定義域内の 2 つの値  $a, b$  に対し, 常に  $f(a) = f(b)$

これを満たすものを <sup>ていすうかんすう</sup>定数関数 という.

定数関数は  $c$  を定数として

$$y = c \text{ または } f(x) = c$$

の形で表される.

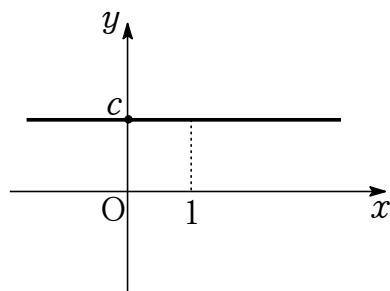
④  $y = 5, f(x) = 5$

定数関数のグラフ

座標平面で

定数関数  $y = c$

のグラフは <sup>ちよくせん</sup>直線 であり, 次のような <sup>がいけい</sup>概形 になる.



このグラフについて

- ① <sup>かたむ</sup>傾きが 0
- ② <sup>せつぺん</sup> $y$  切片が  $c$

□ 1 次関数

$x$  の 1 次式で表される関数を  $x$  の 1 次関数 という.

$x$  の 1 次関数  $y$  は  $a, b$  を定数として

$$y = ax + b \quad (a \neq 0)$$

の形で表される.

例  $y = 3x + 2$

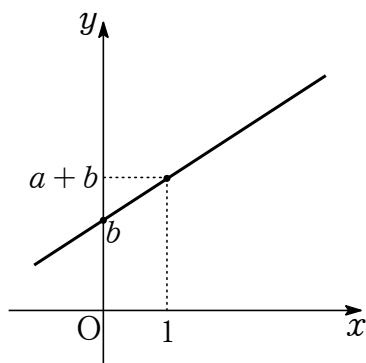
□ 1 次関数のグラフ

座標平面で

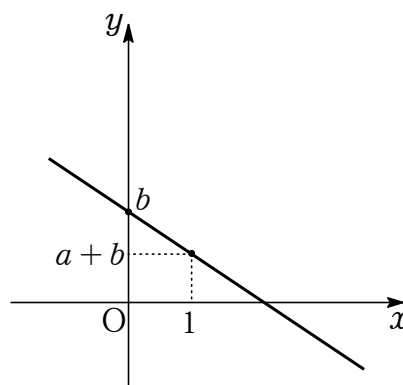
1 次関数  $y = ax + b \quad (a \neq 0)$

のグラフは ちよくせん 直線 であり, 次のような がいけい 概形 となる.

[ $a > 0$  のとき]



[ $a < 0$  のとき]



このグラフについて

- 1 傾きが  $a$
- 2  $y$  切片が  $b$
- 3  $\begin{cases} \text{右上がり} & (a > 0) \\ \text{右下がり} & (a < 0) \end{cases}$

注  $a = 0$  のとき定数関数  $y = b$  となり, グラフは「傾きが 0 の直線」になる.



□ 2 次関数

$x$  の 2 次式で表される関数を  $x$  の 2 次関数 という.

$x$  の 2 次関数  $y$  は  $a, b, c$  を定数として

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

の形で表される.

①  $y = 2x^2 + 3x + 1$

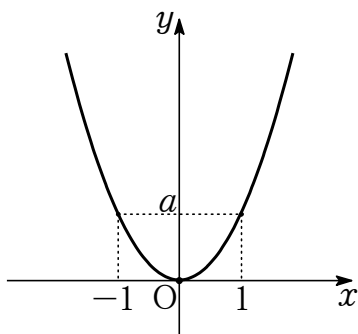
□ 頂点が原点の 2 次関数のグラフ

座標平面で

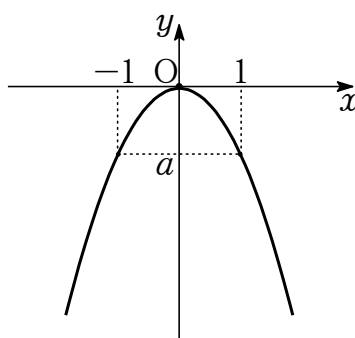
$$2 \text{ 次関数 } y = ax^2 \quad (a \neq 0)$$

のグラフは ほうぶつせん 放物線 であり, 次のような がいけい 概形になる.

[  $a > 0$  のとき ]



[  $a < 0$  のとき ]



このグラフについて

① じく 軸の方程式は  $x = 0$

② ちやうてん 頂点は  $(0, 0)$

③  $\begin{cases} \text{下に凸} & (a > 0) \\ \text{上に凸} & (a < 0) \end{cases}$

□ 比例を表す式

$y$  が  $x$  の関数で  $a$  を定数として  $y = ax$  と表されるとき

$y$  は  $x$  に <sup>ひれい</sup>比例する という。

このとき  $a$  を <sup>ひれいていすう</sup>比例定数 という。

①  $y = 3x$  について  $y$  は  $x$  に比例する。次の表のような値をとることもわかる。

$x$	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$y$	...	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	...

$x = k$  のとき  $y = 3k$

グラフは原点を通り傾き 3 の直線である。

□ 2 乗の比例を表す式

$y$  が  $x$  の関数で  $a$  を定数として  $y = ax^2$  と表されるとき

$y$  は  $x$  の 2 乗に <sup>ひれい</sup>比例する という。

このとき  $a$  を <sup>ひれいていすう</sup>比例定数 という。

①  $y = 3x^2$  について  $y$  は  $x^2$  に比例する。次の表のような値をとることもわかる。

$x$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$y$	...	48	27	12	3	0	3	12	27	48	...

$x = \pm k$  のとき  $y = 3(\pm k)^2 = 3k^2$

グラフは原点が頂点で  $y$  軸に対称な下に凸の放物線である。

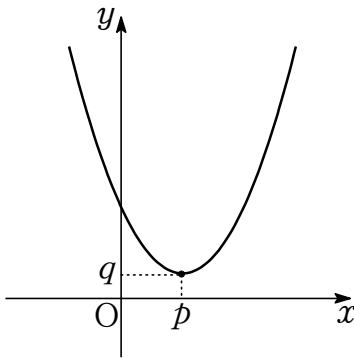
標準形の 2 次関数のグラフ

座標平面で

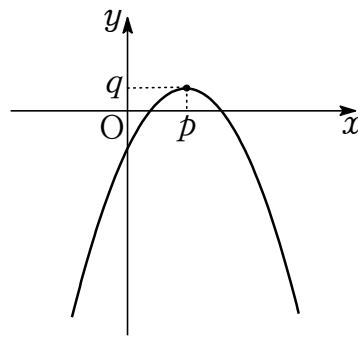
$$2 \text{ 次関数 } y = a(x - p)^2 + q \quad (a \neq 0)$$

のグラフは **放物線** であり、次のような概形となる.

[ $a > 0$  のとき]



[ $a < 0$  のとき]



このグラフについて

① 頂点の座標は  $(p, q)$

② 軸の方程式は  $x = p$

③  $\begin{cases} \text{下に凸} & (a > 0) \\ \text{上に凸} & (a < 0) \end{cases}$

④ 定義域は実数全体

⑤ 値域は  $\begin{cases} y \geq q & (a > 0) \\ y \leq q & (a < 0) \end{cases}$

⑥  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) のグラフを

$x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動したグラフ

⑨ 2 次関数のグラフは放物線で、 $x^2$  の係数  $a$  の符号で上に凸か下に凸かの概形が決まる.

$y = ax^2$  と  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは同じ形 (合同) で頂点が違うだけである.

つまり  $x^2$  の係数が同じ 2 次関数のグラフは同じ形の放物線になる.

例えば  $y = 2x^2$ ,  $y = 2(x - 1)^2 + 3$ ,  $y = 2x^2 - x + 1$ ,  $y = 2(x - 1)(x - 3)$

これらは  $x^2$  の係数がすべて 2 で、頂点が違うだけで同じ形の放物線である.

平方完成

$x$  の 2 次式  $ax^2 + bx + c$  を  $a(x - p)^2 + q$  の形にすることを  
へいほうかんせい  
 $x$  について 平方完成する という.

基本的な平方完成

$$x^2 + \square x = \left(x + \frac{\square}{2}\right)^2 - \left(\frac{\square}{2}\right)^2$$

$\times \frac{1}{2}$  (半分)                       $\uparrow$                        $\uparrow$   
 2 乗してひく

① 例  $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$

② 補  $x^2$  の係数は 1

例題  $x^2 + 3x$  を平方完成せよ.

③ 解  $x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

## 2 次式の平方完成の方法

$x$  の 2 次式  $ax^2 + bx + c$  は次のように平方完成できる.

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \leftarrow x^2 \text{ の係数 } a \text{ で定数項以外をくくる} \\
 &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c \leftarrow \text{基本的な平方完成} \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \leftarrow \text{展開} \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leftarrow (\quad)^2 \text{ の外を整理}
 \end{aligned}$$

⑧ 例  $2x^2 + 12x + 5 = 2(x^2 + 6x) + 5$

$$\begin{aligned}
 &= 2\{(x + 3)^2 - 9\} + 5 \\
 &= 2(x + 3)^2 - 18 + 5 \\
 &= 2(x + 3)^2 - 13
 \end{aligned}$$

例題  $2x^2 + 6x + 1$  を平方完成せよ.

⑨ 解  $2x^2 + 6x + 1 = 2(x^2 + 3x) + 1$

$$\begin{aligned}
 &= 2\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} + 1 \\
 &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 1 \\
 &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

## 平方完成と放物線の頂点の座標

$a \neq 0$  とする.

①  $y = a(x - p)^2 + q$  のグラフの頂点の座標は  $(p, q)$

②  $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$  のグラフの  
頂点の座標は  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

③  $y = 2x^2 + 12x + 5 = 2(x + 3)^2 - 13$  の頂点の座標は  $(-3, -13)$

例題  $y = 2x^2 + 6x + 1$  の頂点の座標を求めよ.

解  $y = 2x^2 + 6x + 1 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$   
頂点の座標は  $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

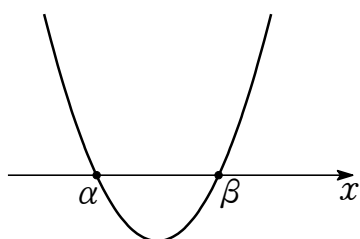
因数分解と 2 次関数のグラフ

座標平面で

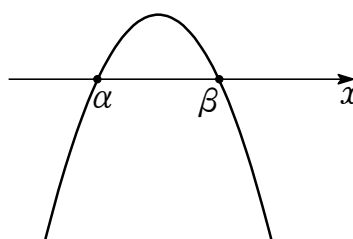
$$2 \text{ 次関数 } y = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad (a \neq 0)$$

のグラフは 放物線 であり  $\alpha < \beta$  とすると次のような概形になる.

[ $a > 0$  のとき]



[ $a < 0$  のとき]



このグラフについて

①  $x$  軸上の 2 点  $(\alpha, 0)$ ,  $(\beta, 0)$  を通る.

② 軸の方程式は  $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

③  $\begin{cases} \text{下に凸} & (a > 0) \\ \text{上に凸} & (a < 0) \end{cases}$

⑧  $\alpha = \beta$  ならば  $y = a(x - \alpha)^2$

**2 次関数の式の形**

$x$  の 2 次関数は次のような式で表される。

ただし  $a, b, c, p, q, \alpha, \beta$  はすべて実数,  $a \neq 0$  とする。

①  $y = ax^2 + bx + c$

②  $y = a(x - p)^2 + q$  ← 頂点の座標が  $(p, q)$ , 軸の方程式が  $x = p$  とわかる形

③  $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$  ←  $x$  軸と  $(\alpha, 0), (\beta, 0)$  で共有点をもつことがわかる形

①, ②, ③ のグラフの概形はすべて  $y = ax^2$  と同じ形の放物線である。

④ ①  $y = 2x^2 - 8x + 6$

②  $y = 2(x - 2)^2 - 2$

③  $y = 2(x - 1)(x - 3)$

①, ②, ③ はいずれも  $y = 2x^2$  と同じ形の放物線である。



**平行移動**

図形上の各点を、同じ方向に一定の距離だけ動かすことを へいこういどう 平行移動 という。  
図形は位置を変えるだけでその形や大きさを変えない。

座標平面における平行移動

座標平面において

① 点  $(a, b)$  を

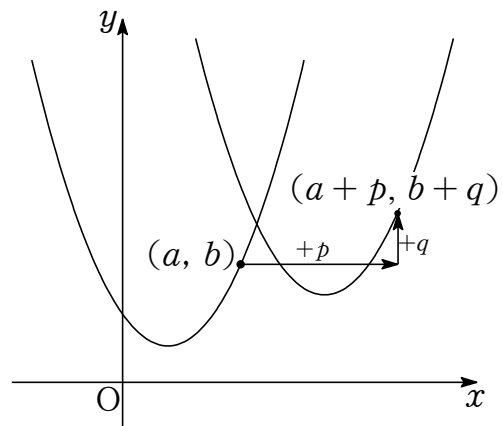
$x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$   
だけ平行移動すると

点  $(a + p, b + q)$

②  $y = f(x)$  のグラフを

$x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$   
だけ平行移動すると

$$y - q = f(x - p) \iff y = f(x - p) + q$$



③ ② 点  $(x, y)$  を  $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動した点を  
点  $(X, Y)$  とすると

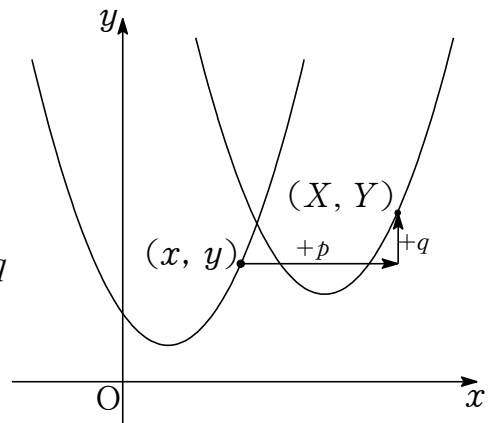
$$\begin{cases} x + p = X \\ y + q = Y \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x = X - p \\ y = Y - q \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y = f(x) \iff Y - q = f(X - p)$$

すなわち、点  $(x, y)$  を  $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$   
だけ平行移動した点の集合は

$$\begin{aligned} & \{(X, Y) \mid Y - q = f(X - p)\} \\ & = \{(x, y) \mid y - q = f(x - p)\} \end{aligned}$$



要

座標平面で

$x$  を  $x - p$  かつ  $y$  を  $y - q$  に置きかえると  
 $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動される。

④ 点  $(x - p, y - q)$  を  $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動すると点  $(x, y)$  となる。

例題 直線  $y = 3x$  のグラフを  $x$  軸方向に 2,  $y$  軸方向に 1 だけ平行移動したグラフの  
式を求めよ。

⑤ 解  $y = 3x$  のグラフを  $x$  軸方向に 2,  $y$  軸方向に 1 だけ平行移動すると  $y = 3(x - 2) + 1$   
よって  $y = 3x - 5$

**直線に関する対称移動**

図形上の各点をおある直線に関して対称な点にうつすことを

ある直線に関する たいしょういどう 対 称 移 動 または お かえ 折 り 返 し という。

図形は位置を変えるだけでその形や大きさを変えない。

座標平面における  $x$  軸に関する対称移動

座標平面において

① 点  $(s, t)$  を

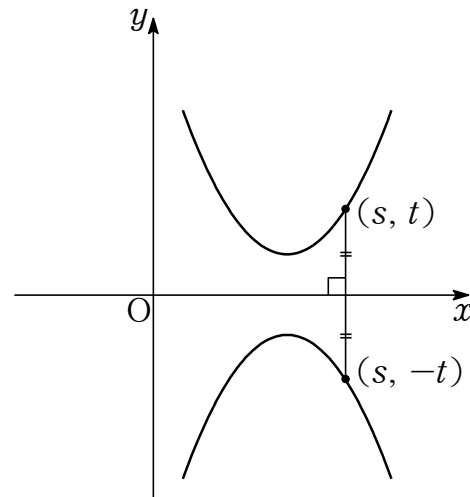
$x$  軸に関して対称移動すると

点  $(s, -t)$

②  $y = f(x)$  のグラフを

$x$  軸に関して対称移動すると

$$-y = f(x) \iff y = -f(x)$$



② 点  $(x, y)$  を  $x$  軸に関して対称移動した点を

点  $(X, Y)$  とすると

$$\begin{cases} x = X \\ y = -Y \end{cases}$$

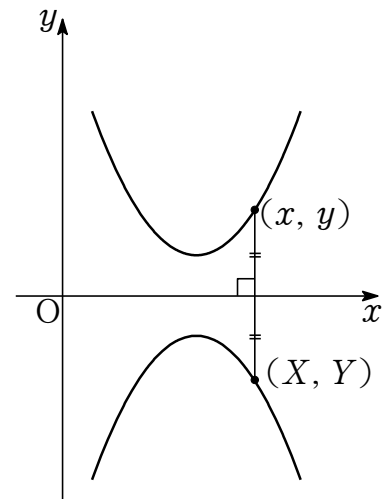
の関係が成り立つことから

$$y = f(x) \iff -Y = f(X)$$

すなわち、点  $(x, y)$  を  $x$  軸に関して対称移動

した点の集合は

$$\{(X, Y) \mid -Y = f(X)\} = \{(x, y) \mid -y = f(x)\}$$



要

座標平面で

$y$  を  $-y$  に置きかえると  $x$  軸に関して対称移動される。

③ 点  $(x, -y)$  を  $x$  軸に関して対称移動すると点  $(x, y)$  となる。

例題 直線  $y = 3x$  のグラフを  $x$  軸に関して対称移動したグラフの式を求めよ。

④ 解  $y = 3x$  のグラフを  $x$  軸に関して対称移動すると  $y = -3x$

座標平面における  $y$  軸に関する対称移動

座標平面において

① 点  $(s, t)$  を

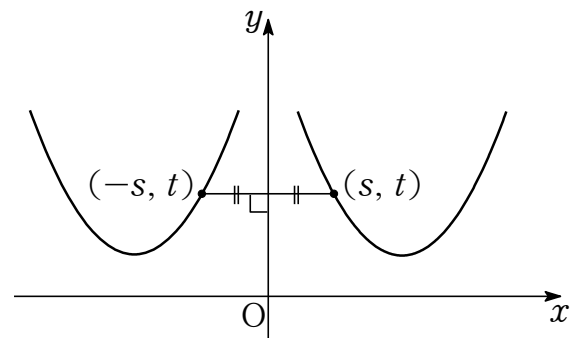
$y$  軸に関して対称移動すると

点  $(-s, t)$

②  $y = f(x)$  のグラフを

$y$  軸に関して対称移動すると

$y = f(-x)$



② 点  $(x, y)$  を  $y$  軸に関して対称移動した点を

点  $(X, Y)$  とすると

$$\begin{cases} x = -X \\ y = Y \end{cases}$$

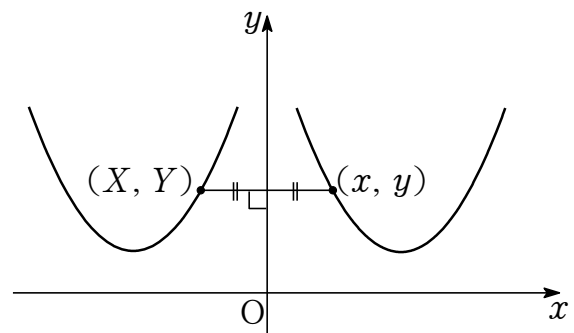
の関係が成り立つことから

$$y = f(x) \iff Y = f(-X)$$

すなわち、点  $(x, y)$  を  $x$  軸に関して対称移動

した点の集合は

$$\{(X, Y) \mid Y = f(-X)\} = \{(x, y) \mid y = f(-x)\}$$



要

座標平面で

$x$  を  $-x$  に置きえると  $y$  軸に関して対称移動される。

③ 点  $(-x, y)$  を  $y$  軸に関して対称移動すると点  $(x, y)$  となる。

例題 直線  $y = 3x$  のグラフを  $y$  軸に関して対称移動したグラフの式を求めよ。

④ 解  $y = 3x$  のグラフを  $y$  軸に関して対称移動すると  $y = 3(-x)$

よって  $y = -3x$

★座標平面における  $x$  軸に平行な直線に関する対称移動

座標平面において

① 点  $(s, t)$  を

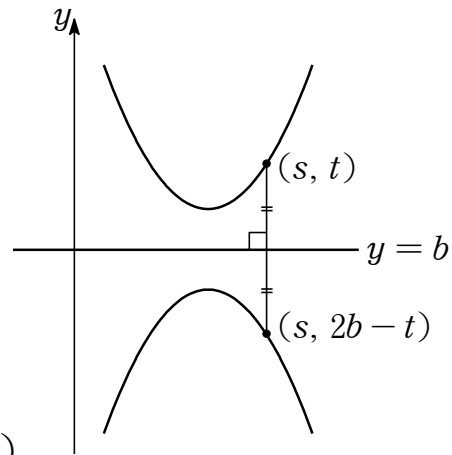
直線  $y = b$  に関して対称移動すると

点  $(s, 2b - t)$

②  $y = f(x)$  のグラフを

直線  $y = b$  に関して対称移動すると

$$2b - y = f(x) \iff y = 2b - f(x)$$



② 点  $(x, y)$  を直線  $y = b$  に関して対称移動した点を点  $(X, Y)$  とすると

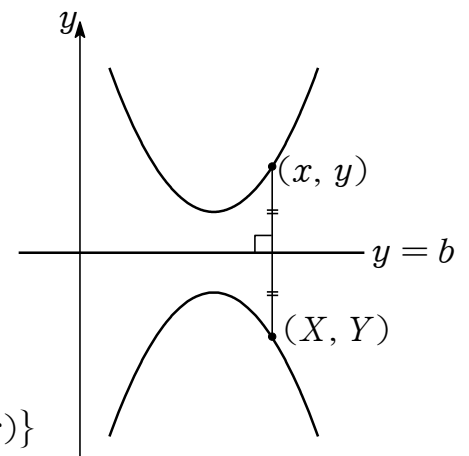
$$\begin{cases} x = X \\ \frac{y + Y}{2} = b \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x = Y \\ y = 2b - Y \end{cases}$$

の関係が成り立つことから

$$y = f(x) \iff 2b - Y = f(X)$$

すなわち、点  $(x, y)$  を直線  $y = b$  に関して対称移動した点の集合は

$$\{(X, Y) \mid 2b - Y = f(X)\} = \{(x, y) \mid 2b - y = f(x)\}$$



要

座標平面で

$y$  を  $2b - y$  に置きかえると直線  $y = b$  に関して対称移動される。

補  $b = 0$  のときは  $x$  軸対称である。

例題 直線  $y = 3x$  のグラフを直線  $y = 1$  に関して対称移動したグラフの式を求めよ。

解  $y = 3x$  のグラフを直線  $y = 1$  に関して対称移動すると  $2 - y = 3x$   
 よって  $y = -3x + 2$

★座標平面における  $y$  軸に平行な直線に関する対称移動

座標平面において

① 点  $(s, t)$  を

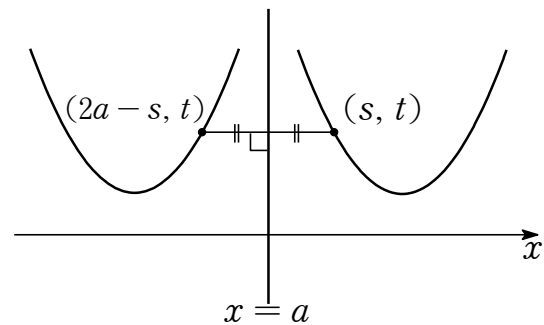
直線  $x = a$  に関して対称移動すると

点  $(2a - s, t)$

②  $y = f(x)$  のグラフを

直線  $x = a$  に関して対称移動すると

$y = f(2a - x)$



③ ② 点  $(x, y)$  を直線  $x = a$  に関して対称移動した点を

点  $(X, Y)$  とすると

$$\begin{cases} \frac{x + X}{2} = a \\ y = Y \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x = 2a - X \\ y = Y \end{cases}$$

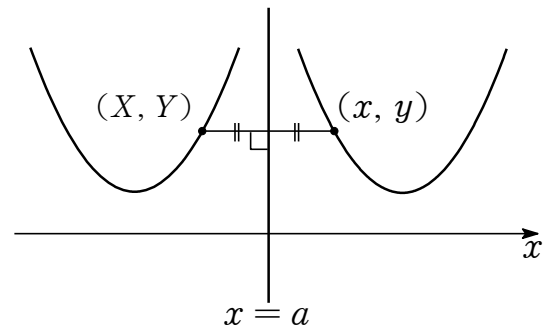
の関係が成り立つことから

$$y = f(x) \iff Y = f(2a - X)$$

すなわち、点  $(x, y)$  を  $x$  軸に関して対称移動

した点の集合は

$$\{(X, Y) \mid Y = f(2a - X)\} = \{(x, y) \mid y = f(2a - x)\}$$



要

座標平面で

$x$  を  $2a - x$  に置きかえると直線  $x = a$  に関して対称移動される。

補  $a = 0$  とすると  $y$  軸対称である。

例題 直線  $y = 3x$  のグラフを直線  $x = 1$  に関して対称移動したグラフの式を求めよ。

解  $y = 3x$  のグラフを直線  $x = 1$  に関して対称移動すると  $y = 3(2 - x)$

よって  $y = -3x + 6$

**点に関する対称移動**

図形上の各点をある点に関して対称な点にうつすことを

ある点に関する たいしょういどう 対称移動 または お かえ 折り返し という。

図形は位置を変えるだけでその形や大きさを変えない。



座標平面における原点に関する対称移動

座標平面において

① 点  $(s, t)$  を

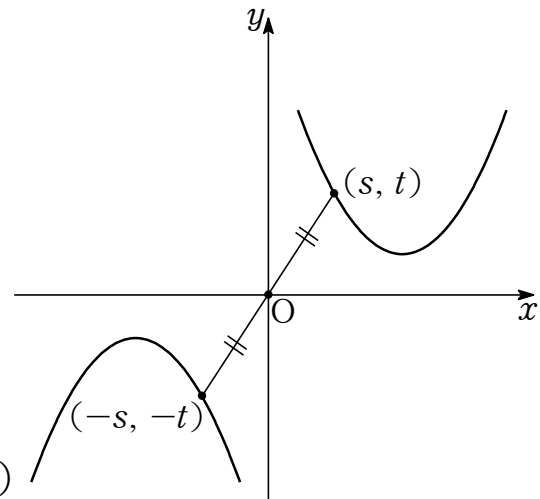
原点に関して対称移動すると

点  $(-s, -t)$

②  $y = f(x)$  のグラフを

原点に関して対称移動すると

$$-y = f(-x) \iff y = -f(-x)$$



② 点  $(x, y)$  を原点に関して対称移動した点を

点  $(X, Y)$  とすると

$$\begin{cases} x = -X \\ y = -Y \end{cases}$$

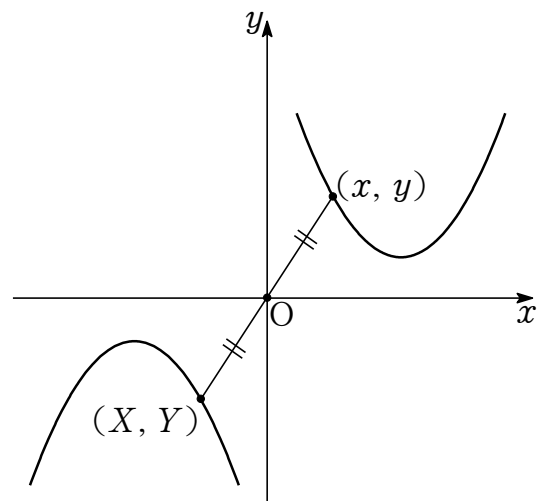
の関係が成り立つことから

$$y = f(x) \iff -Y = f(-X)$$

すなわち、点  $(x, y)$  を  $x$  軸に関して対称移動

した点の集合は

$$\begin{aligned} & \{(X, Y) \mid -Y = f(-X)\} \\ & = \{(x, y) \mid -y = f(-x)\} \end{aligned}$$



要

座標平面で

$x$  を  $-x$  かつ  $y$  を  $-y$  に置きかえると原点に関して対称移動される。

③ 点  $(-x, -y)$  を原点に関して対称移動すると点  $(x, y)$  となる。

例題 直線  $y = 3x + 2$  のグラフを原点に関して対称移動したグラフの式を求めよ。

④ 解  $y = 3x + 2$  のグラフを原点に関して対称移動すると  $-y = 3(-x) + 2$   
よって  $y = 3x - 2$

★座標平面における点に関する対称移動

座標平面において

① 点  $(s, t)$  を

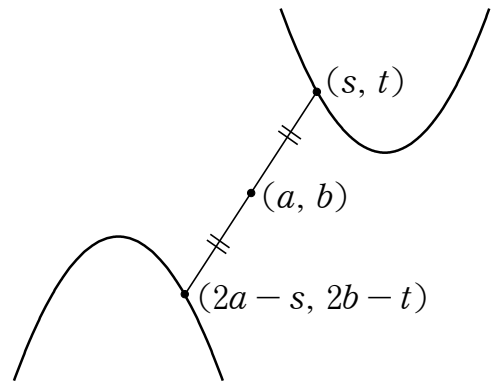
点  $(a, b)$  に関して対称移動すると

点  $(2a - s, 2b - t)$

②  $y = f(x)$  のグラフを

点  $(a, b)$  に関して対称移動すると

$$2b - y = f(2a - x) \iff y = 2b - f(2a - x)$$



③ ② 点  $(x, y)$  を点  $(a, b)$  に関して対称移動した点を

点  $(X, Y)$  とすると

$$\begin{cases} \frac{x + X}{2} = a \\ \frac{y + Y}{2} = b \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x = 2a - X \\ y = 2b - Y \end{cases}$$

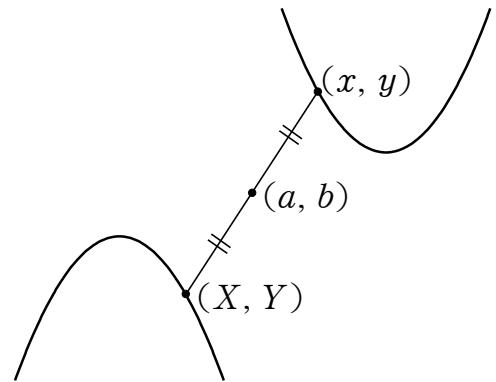
の関係が成り立つことから

$$y = f(x) \iff 2b - Y = f(2a - X)$$

すなわち、点  $(x, y)$  を点  $(a, b)$  に関して対称移動

した点の集合は

$$\{(X, Y) \mid 2b - Y = f(2a - X)\} = \{(x, y) \mid 2b - y = f(2a - x)\}$$



要

座標平面で  $x$  を  $2a - x$  かつ  $y$  を  $2b - y$  に置きかえると

点  $(a, b)$  に関して対称移動される。

補  $(a, b) = (0, 0)$  とすると原点に関しての対称移動となる。

例題 直線  $y = 3x$  のグラフを点  $(1, 2)$  に関して対称移動したグラフの式を求めよ。

解  $y = 3x$  のグラフを点  $(1, 2)$  に関して対称移動すると  $4 - y = 3(2 - x)$

よって  $y = 3x - 2$

2 次関数のグラフの平行移動

座標平面において

放物線  $C : y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) のグラフを

$x$  軸方向に  $p$

$y$  軸方向に  $q$

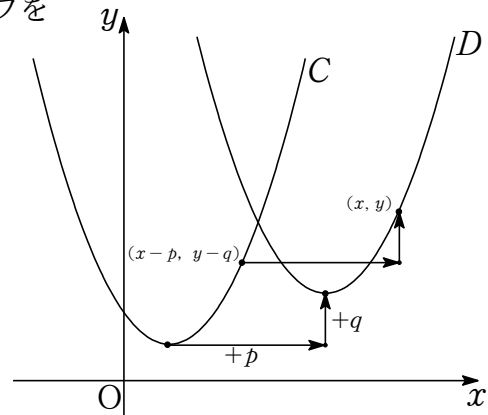
だけ平行移動した放物線を  $D$  とすると

① 2つの放物線  $C$  と  $D$  は  $y = ax^2$  と同じ形

②  $C$  の頂点は  $D$  の頂点に移される.

③  $C$  で  $x$  を  $x - p$ ,  $y$  を  $y - q$  と置きかえると  $D$  の式になる.

つまり  $D : y - q = a(x - p)^2 + b(x - p) + c$



④ 例 放物線  $y = 2x^2$  のグラフを  $x$  軸方向に 2,  $y$  軸方向に 1 だけ平行移動したグラフの式は  $y - 1 = 2(x - 2)^2$  すなわち  $y = 2(x - 2)^2 + 1$

例題 放物線  $y = 2x^2 + 3x + 1$  のグラフを  $x$  軸方向に 2,  $y$  軸方向に 1 だけ平行移動したグラフの式を求めよ.

④ 解  $y = 2x^2 + 3x + 1$  のグラフを  $x$  軸方向に 2,  $y$  軸方向に 1 だけ平行移動したグラフの式は  $y - 1 = 2(x - 2)^2 + 3(x - 2) + 1$   
よって  $y = 2x^2 - 5x + 4$

2 次関数のグラフの  $x$  軸に関する対称移動

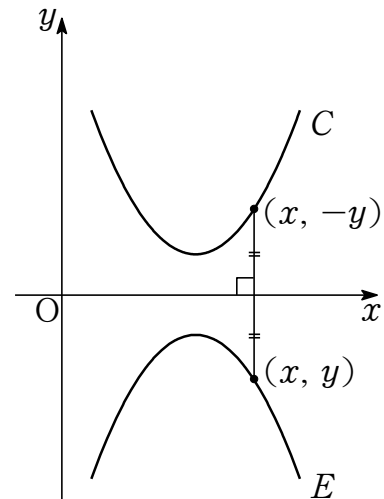
座標平面において

放物線  $C : y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) のグラフを  $x$  軸に関して対称移動した放物線を  $E$  とすると

- ①  $E$  は  $y = -ax^2$  と同じ形
- ②  $C$  の頂点は  $E$  の頂点に移される.
- ③  $C$  で  $y$  を  $-y$  と置きかえると  $E$  の式になる.

つまり  $E : -y = ax^2 + bx + c$

すなわち  $E : y = -ax^2 - bx - c$



⑧ 例 放物線  $y = 2x^2 - 4x + 5$  のグラフを  $x$  軸に関して対称移動したグラフの式は  $-y = 2x^2 - 4x + 5$  すなわち  $y = -2x^2 + 4x - 5$

⑨ 例題 放物線  $y = 2x^2 + 3x + 1$  のグラフを  $x$  軸に関して対称移動したグラフの式を求めよ.

⑩ 解  $y = 2x^2 + 3x + 1$  のグラフを  $x$  軸に関して対称移動したグラフの式は  $-y = 2x^2 + 3x + 1$  よって  $y = -2x^2 - 3x - 1$

2 次関数のグラフの  $y$  軸に関する対称移動

座標平面において

放物線  $C : y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) のグラフを

$y$  軸に関して対称移動した放物線を  $F$  とすると

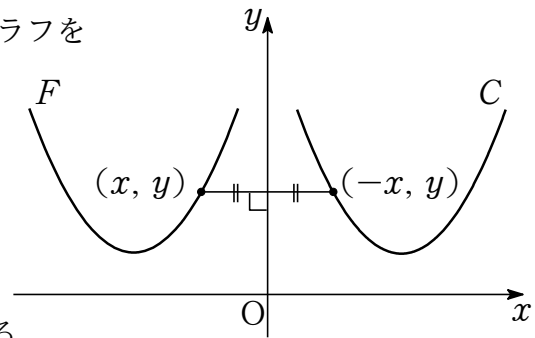
① 2 つの放物線  $C$  と  $F$  は  $y = ax^2$  と同じ形

②  $C$  の頂点は  $F$  の頂点に移される.

③  $C$  で  $x$  を  $-x$  と置きかえると  $F$  の式になる.

つまり  $F : y = a(-x)^2 + b(-x) + c$

すなわち  $F : y = ax^2 - bx + c$



⑧ 例 放物線  $y = 2x^2 - 4x + 5$  のグラフを  $y$  軸に関して対称移動したグラフの式は  $y = 2(-x)^2 - 4(-x) + 5$  すなわち  $y = 2x^2 + 4x + 5$

⑨ 例題 放物線  $y = 2x^2 + 3x + 1$  のグラフを  $y$  軸に関して対称移動したグラフの式を求めよ.

⑩ 解  $y = 2x^2 + 3x + 1$  のグラフを  $y$  軸に関して対称移動したグラフの式は  $y = 2(-x)^2 + 3(-x) + 1$  よって  $y = 2x^2 - 3x + 1$

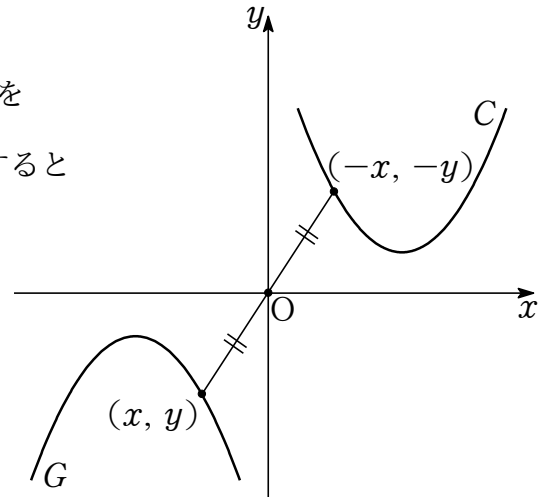
2 次関数のグラフの原点に関する対称移動

座標平面において

放物線  $C : y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) を

原点  $O$  に関して対称移動した放物線を  $G$  とすると

- ①  $G$  は  $y = -ax^2$  と同じ形
- ②  $C$  の頂点は  $G$  の頂点に移される.
- ③  $C$  で  $x$  を  $-x$  かつ  $y$  を  $-y$  と置きかえると  $G$  の式になる.



つまり  $G : -y = a(-x)^2 + b(-x) + c$

すなわち  $G : y = -ax^2 + bx - c$

⑧ 例  $y = 2x^2 - 4x + 5$  のグラフを原点に関して対称移動した放物線の方程式は  $-y = 2(-x)^2 - 4(-x) + 5$  すなわち  $y = -2x^2 - 4x - 5$

例題  $y = 2x^2 + 3x + 1$  のグラフを原点に関して対称移動した放物線の式を求めよ.

⑨ 解  $y = 2x^2 + 3x + 1$  を  $y$  軸に関して対称移動した放物線の式は

$$y = 2(-x)^2 + 3(-x) + 1$$

よって  $y = 2x^2 - 3x + 1$

関数の最大値・最小値

①  $x$  の関数  $y = f(x)$  の <sup>さいだいち</sup>最大値 とは

$y \leq M$  かつ  $y = M$  となる  $x$  が定義域内にあるときの  $M$

②  $x$  の関数  $y = f(x)$  の <sup>さいしょうち</sup>最小値 とは

$y \geq m$  かつ  $y = m$  となる  $x$  が定義域内にあるときの  $m$

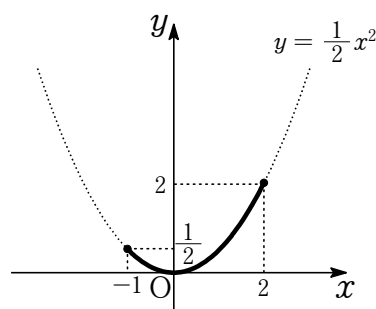
④ 関数  $y = \frac{1}{2}x^2$  ( $-1 \leq x \leq 2$ ) について

グラフは頂点の座標  $(0, 0)$ , 下に凸

右のグラフより  $0 \leq y \leq 2$

よって, 最大値は  $2$  ( $x = 2$ )

最小値は  $0$  ( $x = 0$ )



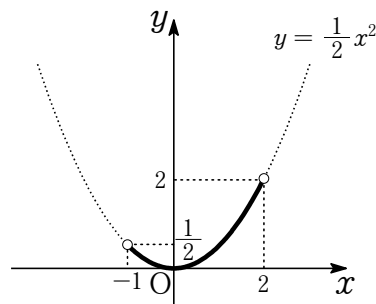
④ 関数  $y = \frac{1}{2}x^2$  ( $-1 < x < 2$ ) について

グラフは頂点の座標  $(0, 0)$ , 下に凸

右のグラフより  $0 \leq y < 2$

よって, 最大値はなし

最小値は  $0$  ( $x = 0$ )



④ 2 次関数  $y = f(x)$  の最大値, 最小値は定義域に注意して値域をみるとよいが, 頂点の座標, 軸の位置, 上に凸か下に凸か調べ, グラフをイメージするとわかる. 特に定義域内に頂点があれば, その点で最大値または最小値をとる.

④ 下に凸の 2 次関数の  $a \leq x \leq b$  における最大値・最小値

④ 上に凸の 2 次関数の  $a \leq x \leq b$  における最大値・最小値

例題 関数  $y = -\frac{1}{2}x^2$  ( $-1 \leq x \leq 2$ ) の最大値と最小値をそれぞれ求めよ.

④ 最大値は  $0$  ( $x = 0$ ), 最小値は  $-2$  ( $x = 2$ )

## 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ は実数, } a \neq 0)$$

の形で表される  $x$  の方程式を  $x$  についての <sup>じ ほうていしき</sup>2 次方程式 という。

2 次方程式を満たす  $x$  の値を 2 次方程式の <sup>かい</sup>解 という、

2 次方程式の解をすべて求めることを 2 次方程式を <sup>と</sup>解く という。

2 次方程式の解の個数は <sup>たかだか</sup>高々 2 個 である。

とくに 解がただ 1 つとなる時、その解を <sup>じゅうかい</sup>重解 または <sup>ちようふくかい</sup>重複解 という。

⑩ 「高々 2 個」とは「多くとも 2 個」「2 個以下」という意味である。

⑪ 代数学では解を根<sup>こん</sup>といい、重解は重根という。

解は方程式を満たす値の集合の要素と解釈できる。



## 因数分解された形の 2 次方程式の解

$a \neq 0$  とする.

①  $x$  の 2 次方程式  $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$  の解は  $x = \alpha, \beta$

②  $x$  の 2 次方程式  $a(x - \alpha)^2 = 0$  の解は  $x = \alpha$

① で  $\alpha = \beta$  となる場合が ② である.

② のようなただ 1 つの解を **重解** という.

① ② 2 次方程式  $2(x - 1)(x - 2) = 0$  の解は  $x = 1, 2$

② 2 次方程式  $2(x - 1)^2 = 0$  の解は  $x = 1$  (重解)

**例題**  $x$  の 2 次方程式  $x^2 + 5x - 6 = 0$  を解け.

① ② 解  $(x + 6)(x - 1) = 0$

よって  $x = -6, 1$

**□ 平方の形と 2 次方程式の解**

$k$  を実数とする.

①  $X$  の 2 次方程式  $X^2 = k$  の解は  $X = \pm\sqrt{k}$

②  $x$  の 2 次方程式  $(x - \alpha)^2 = k$  の解は

$$x - \alpha = \pm\sqrt{k} \quad \text{すなわち} \quad x = \alpha \pm \sqrt{k}$$

② 2 次方程式  $(x - \alpha)^2 = k$  で  $x - \alpha = X$  とおくと  $X^2 = k$  となり ① の形になる.

$$x - \alpha = \pm\sqrt{k} \quad \text{すなわち} \quad x = \alpha \pm \sqrt{k}$$

① 2 次方程式  $x^2 = 2$  の解は  $x = \pm\sqrt{2}$

② 2 次方程式  $(x - 1)^2 = 2$  の解は  $x - 1 = \pm\sqrt{2}$  すなわち  $x = 1 \pm \sqrt{2}$

**例題**  $x$  の 2 次方程式  $2(x - 3)^2 = 10$  を解け.

② 解  $(x - 3)^2 = 5$  すなわち  $x - 3 = \pm\sqrt{5}$

よって  $x = 3 \pm \sqrt{5}$

□ 2 次方程式の解の公式 I

$a, b, c$  は実数,  $a \neq 0, b^2 - 4ac \geq 0$  とする.

$x$  の 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

⑧  $ax^2 + bx + c = 0$  の両辺に  $4a$  をかけて  $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

両辺に  $b^2 - 4ac$  をたして  $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

左辺を平方の式にして  $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

平方根を考えて  $2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

よって  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2 次方程式の解は高々 2 個なので, これが解となる.

⑨ 2 次方程式  $x^2 + 3x - 1 = 0$  の解は

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

( $a = 1, b = 3, c = -1$  として公式にあてはめている)

例題  $x$  の 2 次方程式  $2x^2 + 5x + 1 = 0$  を解け.

⑩  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$

よって  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$

☆ 2 次方程式の解の公式 II

$a, b, c$  は実数,  $a \neq 0, b'^2 - ac \geq 0$  とする.

$x$  の 2 次方程式  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  の解は

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

⑩  $x$  の 2 次方程式  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  の解は 2 次方程式の解の公式 I で  $b = 2b'$  として求めると

$$\begin{aligned} x &= \frac{2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \\ &= \frac{2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} \\ &= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \end{aligned}$$

⑪  $x$  の係数が 2 でくくれるときに有効な公式である.

⑫ 2 次方程式  $3x^2 + 4x - 1 = 0$  の解は

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 3 \cdot (-1)}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

( $a = 3, b' = 2, c = -1$  として公式にあてはめている)

例題  $x$  の 2 次方程式  $x^2 - 4x + 1 = 0$  を解け.

⑬ 解  $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 1}}{1}$   
 よって  $x = 2 \pm \sqrt{3}$

平行の形の 2 次方程式の実数解の個数

$k$  を実数とする.

$x$  の 2 次方程式  $x^2 = k$  の解は  $x = \pm\sqrt{k}$

次のように  $k$  の値で実数解の個数がわかる.

- ①  $k > 0 \iff$  異なる 2 つの実数解をもつ
  - ②  $k = 0 \iff$  ただ 1 つの実数解 (重解) をもつ
  - ③  $k < 0 \iff$  実数解をもたない
- とくに  $k \geq 0 \iff$  実数解をもつ

⑨ ③  $D < 0$  ならば実数解をもたないが, 異なる 2 つの共役な虚数解をもつ. (数学 II)

⑩ ① 2 次方程式  $x^2 = k$  ( $k > 0$ ) の異なる 2 つの実数解は  $x = -\sqrt{k}, \sqrt{k}$

② 2 次方程式  $x^2 = 0$  のただ 1 つの実数解 (重解) は  $x = 0$

③ 2 次方程式  $x^2 = k$  ( $k < 0$ ) の実数解はない.

ただし  $x = \pm\sqrt{-k}i$  の共役な虚数解をもつ (数学 II)

2 次方程式の判別式

$a, b, c$  は実数,  $a \neq 0$  とする.

$x$  の 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  について

$$b^2 - 4ac$$

はんべつしき  
を 判別式 といひ  $D$  で表すことがよくある.

⑪ 代数学では「判別式」は多項式から定義される.

高校数学では 2 次方程式でしか判別式を考えないので, 教科書は上のように

2 次方程式の解の公式 I の根号の中の値を判別式としている.

2 次方程式の実数解の個数 I

$a, b, c$  は実数,  $a \neq 0$  とする.

$x$  の 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は

$$D = b^2 - 4ac \text{ として } x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

次のように  $D$  の値で実数解の個数がわかる.

- ①  $D > 0 \iff$  異なる 2 つの実数解をもつ
  - ②  $D = 0 \iff$  ただ 1 つの実数解 (重解) をもつ
  - ③  $D < 0 \iff$  実数解をもたない
- とくに  $D \geq 0 \iff$  実数解をもつ

⑩ ③  $D < 0$  ならば実数解をもたないが, 異なる 2 つの共役な虚数解をもつ. (数学 II)

⑪ 解の公式の根号の中の符号で実数解の個数が決まる.

① 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $D > 0$ ) の異なる 2 つの実数解は

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

② 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $D = 0$ ) のただ 1 つの実数解 (重解) は

$$x = \frac{-b}{2a}$$

③ 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $D < 0$ ) の実数解はない.

ただし  $x = \frac{-b \pm \sqrt{-D}i}{2a}$  の共役な虚数解をもつ

☆ 2 次方程式の実数解の個数 II

$a, b, c$  は実数,  $a \neq 0$  とする.

$x$  の 2 次方程式  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  について

$$\frac{D}{4} = b'^2 - ac \text{ として } x = \frac{-b' \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$$

次のように  $\frac{D}{4}$  の値で実数解の個数がわかる.

①  $\frac{D}{4} > 0 \iff$  異なる 2 つの実数解をもつ

②  $\frac{D}{4} = 0 \iff$  ただ 1 つの実数解 (重解) をもつ

③  $\frac{D}{4} < 0 \iff$  実数解をもたない

とくに  $\frac{D}{4} \geq 0 \iff$  実数解をもつ

④ 2 次方程式の実数解の個数 I と同様である.

$$D = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) \text{ すなわち } \frac{D}{4} = b'^2 - ac$$

① 2 次方程式  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  ( $\frac{D}{4} > 0$ ) の異なる 2 つの実数解は

$$x = \frac{-b' - \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \frac{-b' + \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$$

② 2 次方程式  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  ( $\frac{D}{4} = 0$ ) のただ 1 つの実数解 (重解) は

$$x = \frac{-b'}{a}$$

③ 2 次方程式  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  ( $\frac{D}{4} < 0$ ) の実数解はない.

ただし  $x = \frac{-b' \pm \sqrt{-\frac{D}{4}}i}{a}$  の共役な虚数解をもつ

☆ 2 次方程式の実数解の差

$a, b, c$  は実数で  $a > 0$  とする.

①  $x$  の 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の実数解を  $x = \alpha, \beta$  ( $\alpha \leq \beta$ )

とすると

$$\beta - \alpha = \frac{\sqrt{D}}{a} \quad \text{ただし } D = b^2 - 4ac (\geq 0)$$

②  $x$  の 2 次方程式  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  の実数解を  $x = \alpha, \beta$  ( $\alpha \leq \beta$ )

とすると

$$\beta - \alpha = \frac{2\sqrt{\frac{D}{4}}}{a} \quad \text{ただし } \frac{D}{4} = b'^2 - ac (\geq 0)$$

④ ①  $x$  の 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$a > 0$  より  $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \leq \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$  であるから

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

よって

$$\beta - \alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

② ① より  $\beta - \alpha = \frac{\sqrt{D}}{a} = \frac{\sqrt{4 \cdot \frac{D}{4}}}{a} = \frac{2\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$

⑤ 2 次方程式  $3x^2 - 4x - 1 = 0$  の解の差は

$$\frac{\sqrt{2^2 - 3 \cdot (-1)}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

⑥ ①  $a > 0$  の条件を  $a \neq 0$  とすると  $|\beta - \alpha| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$  ( $D \geq 0$ )

②  $a > 0$  の条件を  $a \neq 0$  とすると  $|\beta - \alpha| = \frac{2\sqrt{\frac{D}{4}}}{|a|}$  ( $\frac{D}{4} \geq 0$ )



## ☆ 2 次方程式の解との因数分解

$a, b, c$  は実数 とする.

$x$  の 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  が 2 つの解  $x = \alpha, \beta$  をもつならば

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

① 2 次方程式  $x^2 + bx + c = 0$  の解が  $x = 1, 5$  ならば

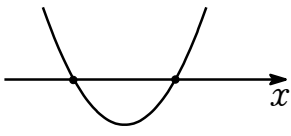
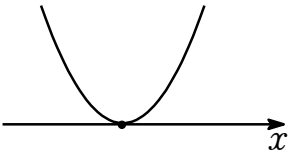
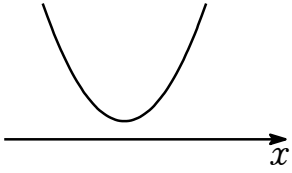
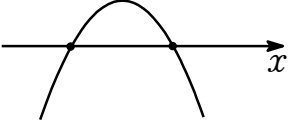
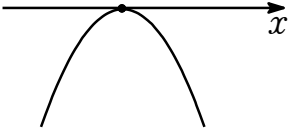
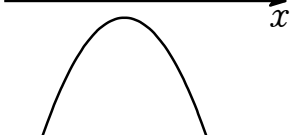
$$\begin{aligned}x^2 + bx + c &= (x - 1)(x - 5) \\ &= x^2 - 6x + 5\end{aligned}$$

2 次関数のグラフと  $x$  軸の位置関係

座標平面で

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) \\ y = 0 \ (x \text{ 軸}) \end{cases}$$

の位置関係は  $D = b^2 - 4ac$  として 次の表のようになる。

$D$ の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
位置関係	異なる 2 点で交わる	1 点で接する	共有点をもたない
$a > 0$ (下に凸)			
$a < 0$ (上に凸)			

- ⑧ 共有点の  $x$  座標は  $x$  についての 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の実数解であるから、実数解の個数から位置関係は決まる。
- ⑨ 下に凸、上に凸か、放物線  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) の頂点の  $y$  座標の符号からも位置関係はわかる。

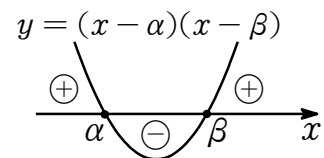
因数分解と 2 次方程式・不等式の解

$\alpha < \beta$  とする.

①  $(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \iff x = \alpha, \beta$

②  $(x - \alpha)(x - \beta) < 0 \iff \alpha < x < \beta$

③  $(x - \alpha)(x - \beta) > 0 \iff x < \alpha, \beta < x$

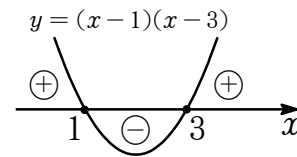


⑨ グラフにある ⊕ は  $y$  の符号が正, ⊖ は  $y$  の符号が負であることを表す.

⑩ ①  $(x - 1)(x - 3) = 0 \iff x = 1, 3$

②  $(x - 1)(x - 3) < 0 \iff 1 < x < 3$

③  $(x - 1)(x - 3) > 0 \iff x < 1, 3 < x$



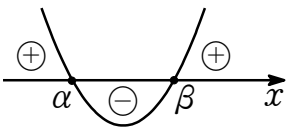
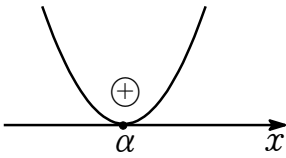
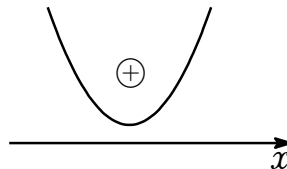
2 次方程式の実数解と 2 次不等式の解

座標平面で

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) \\ y = 0 \ (x \text{ 軸}) \end{cases}$$

の位置関係を考えて  $x$  の 2 次不等式を次のように解くことができる。

ただし  $D = b^2 - 4ac$  とし  $a > 0$ ,  $\alpha < \beta$  とする。

$D$ の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ			
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	$x = \alpha, \beta$	$x = \alpha$	実数解なし
$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$x < \alpha, \beta < x$	$x < \alpha, \alpha < x$	すべての実数 $x$
$ax^2 + bx + c \geq 0$ の解	$x \leq \alpha, \beta \leq x$	すべての実数 $x$	すべての実数 $x$
$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$\alpha < x < \beta$	解なし	解なし
$ax^2 + bx + c \leq 0$ の解	$\alpha \leq x \leq \beta$	$x = \alpha$	解なし

⑨ グラフにある ⊕ は  $y$  の符号が正, ⊖ は  $y$  の符号が負であることを表す。

⑩ グラフをイメージすると不等式の解は求まる。