数学 I　集合と論証

～高校数学のまとめ～

集合

範囲がはっきりしたものの集まりを **集合**（しゅうごう）という．

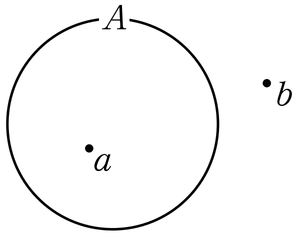
集合を構成している1つ1つのものをその集合の **要素**（ようそ）という．

a が集合 A の要素であることを a は集合 A に **属する**（ぞく）という．

集合とその要素について

集合 A に a が属することを $a \in A$ と表す．

集合 A に b が属さないことを $b \notin A$ と表す．



注 集合を表す記号は A のように大文字で表す．

例 正の偶数の集合を A とするとき $2 \in A$，$3 \notin A$

空集合

要素が1つもない集合を **空集合**（くうしゅうごう）といい $\varnothing$ で表す．

補「部屋はあるけど誰もいない」というようなイメージ．

例 偶数かつ奇数の整数の集合を A とすると，そのような整数はない．

要素が1つもないので $A = \varnothing$

例題　3の倍数の集合を A とする．「9は A に属する」「10は A に属さない」ことをそれぞれ記号を用いて表せ．

解「9は A に属する」は $\boldsymbol{9 \in A}$，「10は A に属さない」は $\boldsymbol{10 \notin A}$

集合の表記

空集合ではない集合は $\{\quad\}$ を使って表すが，表し方は次の 2 つである．

$\boxed{1}$ 要素を書き並べて表す方法

$$\{a,\ b,\ c,\ \cdots\}$$

$\boxed{2}$ 要素が満たすべき条件を書いて表す方法

$$\{x \mid x \text{ が満たす条件}\}$$

例 3 以下の自然数の集合を A とすると

$\boxed{1}$ $A=\{\,1,\ 2,\ 3\,\}$

$\boxed{2}$ $A=\{x \mid x \text{ は 3 以下の自然数}\}$

有限集合と無限集合

$\boxed{1}$ 要素の個数が有限である集合を 有限集合（ゆうげんしゅうごう） という．

$\boxed{2}$ 要素の個数が無限にある集合を 無限集合（むげんしゅうごう） という．

例 $\boxed{1}$ $\{x \mid x \text{ は 3 以下の自然数}\}=\{1,\ 2,\ 3\}$ は要素が 3 個で有限なので有限集合である．

$\boxed{2}$ $\{x \mid x \text{ は自然数}\}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ は要素が無限にあるので無限集合である．

補 要素を全部書きない場合は，一部の要素だけを書き，残りを $\cdots$ で表すことがある．

$\boxed{\text{例題}}$ 10 以下の正の偶数の集合を A とする．この A を記号を用いて表せ．

解 $\boldsymbol{A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}}$，$\boldsymbol{A=\{x \mid x}$ **は 10 以下の正の偶数** $\boldsymbol{\}}$ など

部分集合

集合 A のすべての要素が集合 B の要素になること

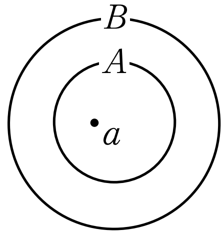
つまり

$a \in A$ ならば $a \in B$

が A のすべての要素で成り立つとき

ぶぶんしゅうごう
集合 A は集合 B の **部分集合**

といい $A \subset B$ と表す．



とくに 集合 A は A 自身の部分集合であり $A \subset A$

また 空集合 $\varnothing$ はすべての集合の部分集合とする．

つまり 任意の集合 A に対して $\varnothing \subset A$ とする．

例 $A=\{1, 2\}$，$B=\{1, 2, 3\}$，$C=\{2, 3, 4\}$

$1 \in B$，$2 \in B$ であるから $A \subset B$

（A のすべての要素が B の要素になっているので，A は B の部分集合である）

$1 \notin C$ であるから $A \subset C$ ではない．

（A のある要素が C の要素になっていないので，A は C の部分集合ではない）

$1 \in A$，$2 \in A$ であるから $A \subset A$

（A のすべての要素が A の要素になっているので，A は A の部分集合である）

また，$\varnothing$ はすべての集合の部分集合とするので $\varnothing \subset A$，$\varnothing \subset B$，$\varnothing \subset C$

真部分集合

2 つの集合 A，B について

$A \subset B$ かつ $A \neq B$

すなわち A は B の部分集合であるが A と B は等しくないことを

しんぶぶんしゅうごう
集合 A は集合 B の **真部分集合** という．

例 $A=\{1, 2\}$，$B=\{1, 2, 3\}$ について，A は B の真部分集合である．

$\boxed{\text{例題}}$ 集合 $\{1, 2\}$ の部分集合をすべて求めよ．

解 集合 $\{1, 2\}$ の部分集合は $\varnothing$，$\{\mathbf{1}\}$，$\{\mathbf{2}\}$，$\{\mathbf{1, 2}\}$

集合の相等

集合 A と集合 B の要素がすべて一致していることを

集合 A と B は等しいといい $A=B$ で表す.

これは $A \subset B$ かつ $A \supset B$ が成り立つことと同じである.

例 $A=\{x \mid x$ は 5 以下の自然数$\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ のとき $A=B$
$A \subset B$ かつ $A \supset B$ が成り立つ.

例題 次の 3 つの集合 A，B，C のうち，集合 $\{1, 2, 3\}$ と等しいものはどれか.
$A=\{x \mid x$ は実数, $1 \leqq x \leqq 3\}$
$B=\{x \mid x$ は整数, $1 \leqq x \leqq 3\}$
$C=\{x \mid x$ は整数, $1 < x < 3\}$

解

集合 A は $1 \leqq x \leqq 3$ となる実数 x を要素にもつ無限集合なので $\{1, 2, 3\} \subset A$

集合 B は $1 \leqq x \leqq 3$ となる整数 x を要素にもつので $B=\{1, 2, 3\}$

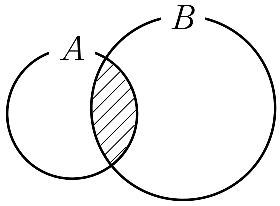
集合 C は $1 < x < 3$ となる整数 x を要素にもつので $C=\{2\}$

よって，集合 $\{1, 2, 3\}$ と等しいものは $\boldsymbol{B}$

2つの集合の共通部分

2つの集合 A，B のどちらにも属する要素全体の集合を

A と B の **共通部分**（きょうつうぶぶん） といい $A \cap B$（$\cap$：きゃっぷ） と表す．



すなわち

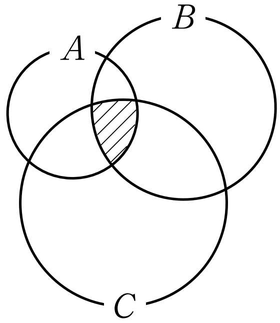
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

例 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$ のとき $A \cap B = \{2, 3\}$

3つの集合の共通部分

3つの集合 A，B，C のどれにも属する要素全体の集合を

A と B と C の **共通部分** といい $A \cap B \cap C$ と表す．



すなわち

$$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \in C\}$$

例 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$，$C = \{3, 4, 5\}$ のとき $A \cap B \cap C = \{3\}$

例題 次の3つの集合 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{b, c, d\}$，$C = \{c, d, e\}$ について，$A \cap B$，$A \cap B \cap C$ をそれぞれ求めよ．

解 $\boldsymbol{A \cap B = \{b, c\}}$，$\boldsymbol{A \cap B \cap C = \{c\}}$

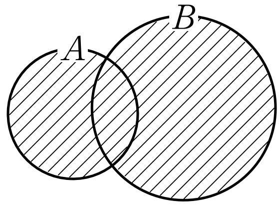
2つの集合の和集合

2つの集合 A，B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を

A と B の **和集合**（わしゅうごう）といい $A \cup B$（かっぷ）と表す．

すなわち

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$



例 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$ のとき $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

話 喫茶店で「珈琲または紅茶」というときは，珈琲か紅茶のどちらか一方ということになりますが，数学だと「珈琲と紅茶」の両方飲んでもよいということになる．

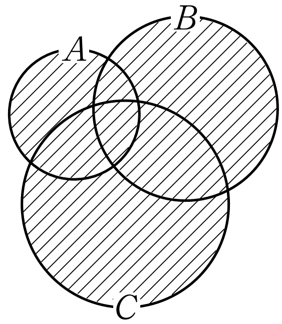
3つの集合の和集合

3つの集合 A，B，C の少なくとも1つの要素全体の集合を

A と B と C の **和集合** といい $A \cup B \cup C$ と表す．

すなわち

$$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B \text{ または } x \in C\}$$



例 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$，$C = \{3, 4, 5\}$ のとき $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

例題　次の3つの集合 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{b, c, d\}$，$C = \{c, d, e\}$ について，$A \cup B$，$A \cup B \cup C$ をそれぞれ求めよ．

解 $\boldsymbol{A \cup B = \{a, b, c, d\}}$，$\boldsymbol{A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e\}}$

全体集合と補集合

集合を考えるときは

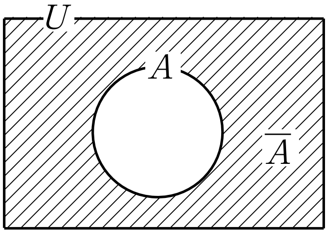
1 つの集合 U を定め，その部分集合について考えることが多い.

このUを 全体集合（ぜんたいしゅうごう） という.

全体集合 U の部分集合 A に対して

U の要素で A に属さない要素全体の集合を

U に関する A の 補集合（ほしゅうごう） といい $\overline{A}$ と表す.



すなわち

$$\overline{A}=\{x \mid x\in U \text{ かつ } x\notin A\}$$

㊞ 全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ とその部分集合 $A=\{1,\ 2\}$ について $\overline{A}=\{3,\ 4,\ 5\}$

補集合の性質

U を全体集合とし，A をその部分集合とする.

$\boxed{1}$ $A\cap\overline{A}=\varnothing$

$\boxed{2}$ $A\cup\overline{A}=U$

$\boxed{3}$ $\overline{U}=\varnothing$

$\boxed{4}$ $\overline{\varnothing}=U$

$\boxed{5}$ $\overline{(\overline{A})}=A$

㊂ 定義から明らか.

㊓ $\boxed{5}$ 補集合の補集合はもとの集合になる.

$\boxed{\text{例題}}$ 全体集合 $U=\{x \mid 1\leqq x\leqq 10\}$ とその部分集合 $A=\{x \mid 1\leqq x\leqq 5\}$ について $\overline{A}$ を求めよ.

㊕ $\boldsymbol{\overline{A}=\{x \mid 5<x\leqq 10\}}$

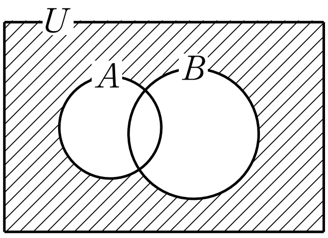
ド・モルガンの法則

U を全体集合とし，A，B をその部分集合とする．

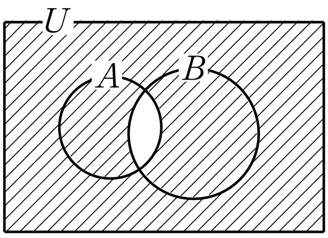
1　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1 のベン図



2 のベン図



例　全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とその部分集合 $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4\}$ について
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$，$A \cap B = \{2, 3\}$，$\overline{A} = \{4, 5\}$，$\overline{B} = \{1, 5\}$
1 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \{5\}$
2 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 4, 5\}$

補　バーをばらすと $\cup$ と $\cap$ が入れかわる．

話　オーガスタス・ド・モルガン（1806− 1871）インド生まれのイギリスの数学者．

例題　全体集合 $U = \{x \mid x$ は 1 以上 10 以下の整数 $\}$ とその部分集合
$A = \{x \mid x \in U,\ x$ は 2 の倍数 $\}$，$B = \{x \mid x \in U,\ x$ は 3 の倍数 $\}$ について
$\overline{A} \cup \overline{B}$ を求めよ．

解

全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$，$B = \{3, 6, 9\}$ であることから $A \cap B = \{6\}$
よって $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10}\}$

★3つの集合でのド・モルガンの法則

3つの集合 A，B，C について

$\boxed{1}$ $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

$\boxed{2}$ $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

例 全体集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ とその部分集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{3,4,5\}$ について

$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5\}$，$A\cap B\cap C=\{3\}$

$\overline{A}=\{4,5,6\}$，$\overline{B}=\{1,5,6\}$，$\overline{C}=\{1,2,6\}$

$\boxed{1}$ $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\{6\}$

$\boxed{2}$ $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\{1,2,3,4,5\}$

例題 全体集合 $U=\{x \mid x$ は1以上10以下の整数$\}$ とその部分集合 $A=\{x \mid x\in U,\ x$ は2の倍数$\}$，$B=\{x \mid x\in U,\ x$ は3の倍数$\}$，$C=\{x \mid x\in U,\ 6$ の倍数$\}$ について，$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ を求めよ．

解

全体集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{3,6,9\}$，$C=\{6\}$ であることから $A\cap B\cap C=\{6\}$

よって $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{A\cap B\cap C}=\{\mathbf{1,2,3,4,5,7,8,9,10}\}$

命題

正しいか正しくないかが明確に定まる文や式を **命題**（めいだい）という．

命題が正しいとき，その命題は **真**（しん） または **成り立つ** という．

命題が正しくないとき，その命題は **偽**（ぎ） または **成り立たない** という．

(例)「2 は偶数である」という文は明確に正しいと定まるので **命題** である．

「100 は大きい」という文は正しいか正しくないかは定まらないので **命題** ではない．

例題　次の Ⓐ ～ Ⓔ の文または式の中から命題であるものをすべて選べ．

Ⓐ $\sqrt{4}$ は整数である．	Ⓑ $\sqrt{4}$ は整数ではない．
Ⓒ 10000 は大きい数である．	Ⓓ 10000 は小さい数である．
Ⓔ $1+1=2$	Ⓕ $1+1=3$

(解)

$\sqrt{4}=2$ は整数より Ⓐ は明確に正しい定まるので命題である．

Ⓑ は明確に正しくないと定まるので命題である．

10000 が大きい，小さいの基準が不明なので，Ⓒ，Ⓓ は明確に正しいか正しくないかが定まらないので命題ではない．

$1+1=2$ より Ⓔ は明確に正しくないと定まるので命題である．

Ⓕ は明確に正しくないと定まるので命題である．

よって，命題であるものは **Ⓐ, Ⓑ, Ⓔ, Ⓕ**

条件

文字を含む文や式でその文字に値を代入したときに

真偽が定まる文や式を 条件(じょうけん) という.

とくに 文字に値を代入して真になるとき「条件を満たす」と言う.

条件を考えるとき

条件に含まれるもの（文字）がどのような集合の要素かを明確にさせておく.

この集合を その条件の全体集合という.

例 x を整数とするとき「p：x は偶数である」は文字 x を含む文で

$x=2$ とすると真, $x=3$ とすると偽

x に値を代入すると p の真偽が決まるので, p は **条件** である.

この条件の全体集合は整数の集合である.

補 条件が真となる文字の全体集合を真理集合(しんりしゅうごう)という

補 条件は p, q などの小文字で表すことが多い.

例題 次の Ⓐ〜Ⓒ の数から条件であるものを選び, 条件を満たすような範囲を求めよ.

Ⓐ 2 は偶数である

Ⓑ x は大きい数である

Ⓒ $x-1>0$

解 条件であるものは Ⓒ, 条件を満たすような範囲は $\boldsymbol{x>1}$

否定

条件 p に対し

「p でない」という条件を条件 p の 否定(ひてい) といい $\overline{p}$ と表す.

㊄ 条件「p：x は偶数である」の否定は「$\overline{p}$：x は偶数でない」

x が整数とするならば「$\overline{p}$：x は奇数である」

x が整数と定めないと，$x=\sqrt{2}$，$x=\dfrac{1}{2}$ なども否定 $\overline{p}$ を満たすことになる.

㊓ 条件 p に含まれる文字の全体集合を定めておかないと具体的に否定 $\overline{p}$ は定まらない.

例題 x は実数とする．条件「x は無理数である」の否定を答えよ.

㊋ 条件「x は無理数である」の否定は「x は無理数でない」

よって，x は実数なので，否定は**「x は有理数である」**

仮定と結論

p，q を条件とする．

命題「p ならば q 」を 命題「$p \implies q$」 とかく．

この命題で p を **仮定**（かてい），q を**結論**（けつろん） という．

例 命題「x が整数ならば x は実数」を命題「x が整数 $\implies$ x は実数」とかく．

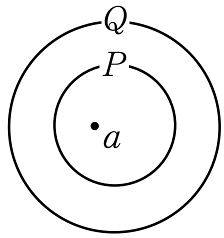
命題が真・偽になる条件

条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とする．

$\boxed{1}$ 命題「$p \implies q$」が **真** であるとは

p を満たすものはすべて q を満たす ことである．

つまり $P \subset Q$ が成り立つことである．



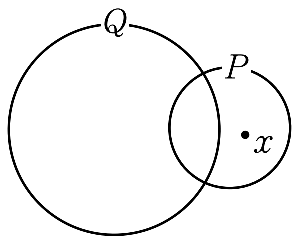
$\boxed{2}$ 命題「$p \implies q$」が **偽** であるとは

p を満たすが q を満たさないものがあることである．

つまり $\{x \mid x \in P$ かつ $x \notin Q\}$ となる x がある

ことである．

このある x を **反例**（はんれい） という．



例 $\boxed{1}$ 2 つの条件

p：x は整数

q：x は実数

とすると，$p \implies q$ は真である．

p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P, Q とすると $P \subset Q$ が成り立つ．

$\boxed{2}$ 2 つの条件

p：x は整数

q：x は自然数

とすると，$p \implies q$ は偽である．

$x = -1$ とすると p を満たすが q を満たさない（-1 は整数であるが自然数ではない）

つまり，反例に $x = -1$ がある．

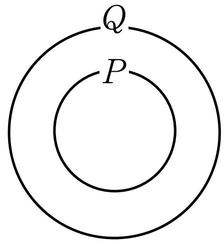
例題	命題「x は素数 $\implies$ x は奇数」は偽であることを示せ．

解 2 は素数であるが，奇数ではない．つまり，**反例に 2 がある** ので偽である．

十分条件と必要条件

p，q を条件とする．

命題「$p \implies q$」が **真** であるとき



$\boxed{1}$ p は q であるための **十分条件**（じゅうぶんじょうけん）であるという．

$\boxed{2}$ q は p であるための **必要条件**（ひつようじょうけん）であるという．

㊀ 命題「x は整数 $\implies$ x は実数」は真である．

$\boxed{1}$ x が整数であることは x が実数であるための十分条件である．

$\boxed{2}$ x が実数であることは x が整数であるための必要条件である．

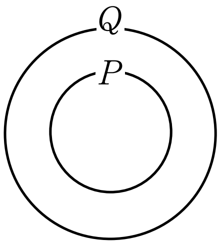
㊉ 矢印の向きで覚えるより集合でイメージするとよい．

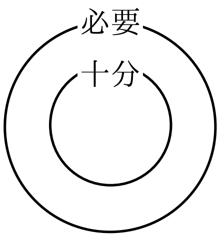
要

条件 p，q の満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると

命題「$p \implies q$」が真 すなわち $P \subset Q$

p が主語のとき，q が主語のときで下の図のようになる．





$\boxed{\text{例題}}$ 次の文の $\boxed{}$ に必要，十分のいずれかを入れよ．

n が 3 の倍数であることは n が 6 の倍数であるための $\boxed{}$ 条件である．

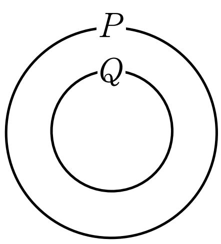
解

p：n は 3 の倍数

q：n は 6 の倍数

として，p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると

$Q \subset P$ が成り立ち，$P \subset Q$ は成り立たない．



よって，n が 3 の倍数であることは n が 6 の倍数であるための $\boxed{\text{必要}}$ 条件である．

必要十分条件・同値

条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とする．

命題「$p \Longrightarrow q$」が真 かつ 命題「$q \Longrightarrow p$」が真

つまり $P = Q$ のとき

1. p は q であるための 必要十分条件（ひつようじゅうぶんじょうけん） であるという．
2. q は p であるための 必要十分条件 であるという．
3. p と q は 同値（どうち） であるという．

例 「$x^2 = 1 \Longrightarrow |x| = 1$」は真，「$|x| = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$」は真

1. $x^2 = 1$ は $|x| = 1$ であるための必要十分条件である．
2. $|x| = 1$ は $x^2 = 1$ であるための必要十分条件である．
3. $x^2 = 1$ と $|x| = 1$ は同値である．

同値変形

条件 p，q について

「$p \Longrightarrow q$」が真 かつ 「$q \Longrightarrow p$」が真

つまり p と q が同値であることを $p \Longleftrightarrow q$ とかけて

この p と q の言いかえを 同値変形（どうちへんけい） といい $\Longleftrightarrow$ を 同値記号 という．

例 $x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm 1$

例 「$x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$」 は成り立つが

「$x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$」 は成り立たない．（反例は $x = -1$）

「$x = 1 \Longleftrightarrow x^2 = 1$」 は間違いで，正しくは 「$x = 1 \Longleftrightarrow x > 0$ かつ $x^2 = 1$」

例題 条件：$x^2 - 5x + 6 = 0$ と同値な条件を次のⒶ ～ Ⓓのうちから選べ．

Ⓐ $x = 2$　　Ⓑ $x = 3$

Ⓒ $x = 2$ かつ $x = 3$　　Ⓓ $x = 2$ または $x = 3$

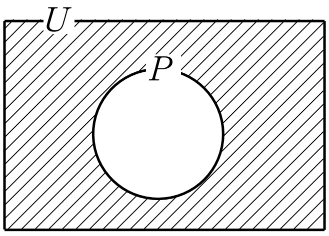
解 $x^2 - 5x + 6 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Longleftrightarrow x = 2$ または $x = 3$

よって，**Ⓓ**

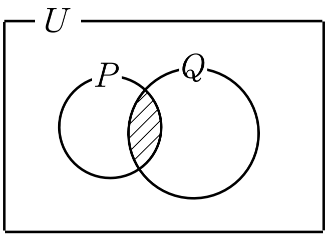
条件と集合

全体集合をUとし，条件p，qを満たすもの全体の集合をそれぞれP，Qとする．

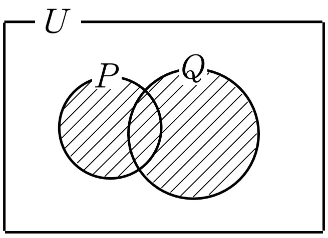
1 $\overline{p}$を満たすもの全体の集合は$\overline{P}$



2 pかつqを満たすもの全体の集合は$P \cap Q$



3 pまたはqを満たすもの全体の集合は$P \cup Q$



補 条件を集合で考えている．

例 xを実数とし，2つの条件p，qを$p : 0 \leqq x \leqq 2$，$q : 1 \leqq x \leqq 3$とする．
全体集合をUとし，p，qを満たすもの全体の集合をそれぞれP，Qとすると

$U = \{x \mid x$は実数$\}$

$P = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 2\}$

$Q = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 3\}$

$\overline{p}$を満たすもの全体の集合は　$\overline{P} = \{x \mid x < 0,\ 2 < x\}$

pかつqを満たすもの全体の集合は　$P \cap Q = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 2\}$

pまたはqを満たすもの全体の集合は　$P \cup Q = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 3\}$

例題　xを実数とする．2つの条件p，qを$p : 0 \leqq x \leqq 2$，$q : 1 \leqq x \leqq 3$ とする．このとき，3つの条件$\overline{p}$，pかつq，pまたはqをそれぞれxで表せ．

解 **$\boldsymbol{\overline{p} : x < 0, 2 < x}$，　$\boldsymbol{p}$かつ$\boldsymbol{q : 1 \leqq x \leqq 2}$，　$\boldsymbol{p}$または$\boldsymbol{q : 0 \leqq x \leqq 3}$**

「かつ」「または」の否定

条件 p，q に対し，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}$

$\boxed{2}$ $\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$

㊢ ド・モルガンの法則

㊟ x，y を実数とする．

$\boxed{1}$ $\overline{x > 0 \text{ かつ } y > 0} \iff \overline{x > 0} \text{ または } \overline{y > 0} \iff x \leqq 0 \text{ または } y \leqq 0$

$\boxed{2}$ $\overline{x > 0 \text{ または } y > 0} \iff \overline{x > 0} \text{ かつ } \overline{y > 0} \iff x \leqq 0 \text{ かつ } y \leqq 0$

$\boxed{\text{例題}}$　x，y を実数とする．条件「$x < 0$ かつ $y \geqq 2$」の否定を述べよ．

㊫ $\overline{x < 0 \text{ かつ } y \geqq 2} \iff \overline{x < 0} \text{ または } \overline{y \geqq 2} \iff x \geqq 0 \text{ または } y < 2$

よって，条件「$x < 0$ かつ $y \geqq 2$」の否定は**「$\boldsymbol{x \geqq 0}$ または $\boldsymbol{y < 2}$」**

★「かつ」「または」の否定（3つの条件）

条件 p，q，r に対し，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\overline{p\ \text{かつ}\ q\ \text{かつ}\ r} \iff \overline{p}\ \text{または}\ \overline{q}\ \text{または}\ \overline{r}$

$\boxed{2}$ $\overline{p\ \text{または}\ q\ \text{または}\ r} \iff \overline{p}\ \text{かつ}\ \overline{q}\ \text{かつ}\ \overline{r}$

考 ド・モルガンの法則

例 x，y，z を実数とする．

$\boxed{1}$ $\overline{x>0\ \text{かつ}\ y>0\ \text{かつ}\ z>0} \iff \overline{x>0}\ \text{または}\ \overline{y>0}\ \text{または}\ \overline{z>0}$

$\iff x \leqq 0\ \text{または}\ y \leqq 0\ \text{または}\ z \leqq 0$

$\boxed{2}$ $\overline{x>0\ \text{または}\ y>0\ \text{または}\ z>0} \iff \overline{x>0}\ \text{かつ}\ \overline{y>0}\ \text{かつ}\ \overline{z>0}$

$\iff x \leqq 0\ \text{かつ}\ y \leqq 0\ \text{かつ}\ z \leqq 0$

例題　x，y，z を実数とする．条件「$x<0$ かつ $y \geqq 1$ かつ $z \geqq 2$」の否定を述べよ．

解 $\overline{x<0\ \text{かつ}\ y \geqq 1}\ \text{かつ}\ z \geqq 2 \iff \overline{x<0}\ \text{または}\ \overline{y \geqq 1}\ \text{または}\overline{z \geqq 2}$

$\iff x \geqq 0\ \text{または}\ y<1\ \text{または}\ z<2$

よって，条件「$x<0$ かつ $y \geqq 1$ かつ $z \geqq 2$」の否定は**「$\boldsymbol{x \geqq 0}$ または $\boldsymbol{y<1}$ または $\boldsymbol{z<2}$」**

命題の逆・裏・対偶

条件 p，q についての命題「$p \implies q$」に対して

$\boxed{1}$ 命題「$q \implies p$」を命題「$p \implies q$」の **逆**（ぎゃく）という．

$\boxed{2}$ 命題「$\overline{p} \implies \overline{q}$」を命題「$p \implies q$」の **裏**（うら）という．

$\boxed{3}$ 命題「$\overline{q} \implies \overline{p}$」を命題「$p \implies q$」の **対偶**（たいぐう）という．

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{p \Rightarrow q} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{逆}"] \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{裏}"'] \arrow[ddrr, leftrightarrow, "\text{対偶}"] & & \boxed{q \Rightarrow p} \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{裏}"] \arrow[ddll, leftrightarrow] \\
& & \\
\boxed{\overline{p} \Rightarrow \overline{q}} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{逆}"'] & & \boxed{\overline{q} \Rightarrow \overline{p}}
\end{tikzcd}
$$

㊎例 命題「x が偶数である $\implies$ x が 4 の倍数である」について

$\boxed{1}$ 逆の命題は「x が 4 の倍数である $\implies$ x が偶数ある」

$\boxed{2}$ 裏の命題は「x が偶数ではない $\implies$ x が 4 の倍数ではない」

$\boxed{3}$ 対偶命題は「x が 4 の倍数ではない $\implies$ x が偶数ではない」

$\boxed{\text{例題}}$ x を実数とする．命題「x が整数である $\implies$ x が有理数である」の逆，裏，対偶をつくり，その真偽を答えよ．

解 逆「$\boldsymbol{x}$ が有理数である $\implies$ $\boldsymbol{x}$ が整数である」偽 $\left(\text{反例は } x = \dfrac{1}{2}\right)$

裏「$\boldsymbol{x}$ が整数ではない $\implies$ $\boldsymbol{x}$ が無理数である」偽 $\left(\text{反例は } x = \dfrac{1}{2}\right)$

対偶「$\boldsymbol{x}$ が無理数である $\implies$ $\boldsymbol{x}$ が整数ではない」真

部分集合と補集合

U を全体集合とし，A，B をその部分集合とするとき

1. $A \subset B$ ならば $\overline{B} \subset \overline{A}$
2. $\overline{B} \subset \overline{A}$ ならば $A \subset B$

例 全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とその部分集合 $A = \{1, 2\}$，$B = \{1, 2, 3\}$ について

$A \subset B$

このとき $\overline{A} = \{3, 4, 5\}$，$\overline{B} = \{4, 5\}$ であるから $\overline{B} \subset \overline{A}$

対偶の真偽

条件 p，q についての命題「$p \implies q$」と その対偶「$\overline{q} \implies \overline{p}$」 は

真偽が一致 する．

すなわち

1. 命題「$p \implies q$」が 真 ならば 「$\overline{q} \implies \overline{p}$」も 真
2. 命題「$p \implies q$」が 偽 ならば 「$\overline{q} \implies \overline{p}$」も 偽

考 条件 p，q を満たす全体の集合をそれぞれ P，Q とすると $P \subset Q$ ならば $\overline{Q} \subset \overline{P}$

対偶命題を用いた証明法

条件 p，q についての命題「$p \implies q$」が真であることを 証明 するのに

対偶「$\overline{q} \implies \overline{p}$」が真であることを示す 論法 がある．

考 対偶命題ともとの命題の真偽は一致するので，対偶命題が真ならばもとの命題も真である．

例 x を実数とする．命題「x が整数である $\implies$ x が有理数である」は真

対偶「x が無理数である $\implies$ x が整数ではない」も真

例題 命題「$x + y \neq 2 \implies x \neq 1$ または $y \neq 1$」が成り立つことを証明せよ．

解 命題「$x = 1$ かつ $y = 1 \implies x + y = 2$」 は真である．

よって，その対偶「$x + y \neq 2 \implies x \neq 1$ または $y \neq 1$」も真であるから証明された．

背理法

ある命題を証明するのに

その命題が成り立たないと仮定すると，矛盾が生じる．

したがって，その命題は成り立たなければならない．

とする論法がある．

このような論法を背理法（はいりほう）という．

とくに 条件 p，q についての命題「$p \Longrightarrow q$」を証明するには

命題「$p \Longrightarrow \overline{q}$」と仮定して矛盾を導くことで証明される．

補 直接証明するのが困難なときによく用いる．

例 「400 人いるとき，同じ誕生日の人が少なくとも 1 組はある」を証明する．

400 人いるとき，同じ誕生日の人が 1 組もないと仮定すると，異なる誕生日が 400 日あることになるが，1 年は 365 日または 366 日であることに矛盾する．

よって，400 人いるとき，同じ誕生日の人が少なくとも 1 組はあることが証明された．

例題 x，y を実数とする．

$x+y=0$ のとき $x \geqq 0$ または $y \geqq 0$ が成り立つことを証明せよ．

解 $x+y=0$ のとき $x<0$ かつ $y<0$ と仮定すると $x+y<0$ となることから矛盾する．

よって，$x+y=0$ のとき $x \geqq 0$ または $y \geqq 0$ であることが証明された．

★全称命題

全体集合をU，$x \in U$ としてxに関する条件$p(x)$を考える.

次の$\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$の命題は同値である.

$\boxed{1}$ すべてのxについて$p(x)$

$\boxed{2}$ どのようなxに対しても$p(x)$

$\boxed{3}$ 任意のxについて$p(x)$

これは全体集合Uのすべての要素が条件$p(x)$を満たすということである.

このような形式の命題を**全称命題**（ぜんしょうめいだい）という.

㋡ 実数全体の集合をU，$x \in U$ として　$p(x)$: $x^2 \geqq 0$

$\boxed{1}$ すべての実数xについて$x^2 \geqq 0$

$\boxed{2}$ どのような実数xに対しても$x^2 \geqq 0$

$\boxed{3}$ 任意の実数xについて$x^2 \geqq 0$

これは真である.

㊟補 「任意のx」とは「xを誰がどのように選んでも」というイメージ.

㊟補 論理学では「$\forall x \in U$, $p(x)$」と表す.（$\forall$ は Any あるいは All の A を逆にしたもの）

$\boxed{\text{例題}}$ 命題「すべての実数xに対して$(x-1)^2 > 0$が成り立つ」の真偽を答えよ.

㊫解 $x = 1$ とすると，$(x-1)^2 = (1-1)^2 = 0$ となる.

よって，命題は**偽**

★存在命題

全体集合を U，$x \in U$ として x に関する条件 $p(x)$ を考える．

次の $\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$ の命題は同値である．

$\boxed{1}$ ある x について $p(x)$

$\boxed{2}$ 適当な x について $p(x)$

$\boxed{3}$ $p(x)$ である x が存在する

これは

全体集合 U の中に条件 $p(x)$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する

ということである．

このような形式の命題を **存在命題**（そんざいめいだい）という．

㊎ 実数全体の集合を U，$x \in U$ として　$p(x): x^2 < 10$

$\boxed{1}$ ある実数 x について $x^2 < 10$

$\boxed{2}$ 適当な実数 x について $x^2 < 10$

$\boxed{3}$ $x^2 < 10$ である実数 x が存在する

これは $p(0): 0 < 10$ より条件を満たし，$x = 0$ が存在するから真である．

㊓ 論理学では「$\exists x \in U,\ p(x)$」と表す．（$\exists$ は Exist の E を逆にしたもの）

$\boxed{\text{例題}}$　命題「ある実数 x に対して $(x-1)^2 > 0$ が成り立つ」の真偽を答えよ．

㊎ $x = 2$ とすると，$(x-1)^2 = (2-1)^2 = 1 > 0$ より条件を満たす．

よって，命題は **真**

★全称命題，存在命題の否定

x に関する条件 $p(x)$ に対し

$\boxed{1}$ 命題「すべての x について $p(x)$」の否定は「ある x について $p(x)$ でない」

つまり

$$\overline{\text{すべての } x \text{ について } p(x)} = \text{ある } x \text{ について } \overline{p(x)}$$

$\boxed{2}$ 命題「ある x について $p(x)$」の否定は「すべての x について $p(x)$ でない」

つまり

$$\overline{\text{ある } x \text{ について } p(x)} = \text{すべての } x \text{ について } \overline{p(x)}$$

考 ド・モルガンの法則

例 $\boxed{1}$ 「すべての実数 x について $x^2 \geqq 0$」の否定は「ある実数 x について $x^2 < 0$」

$\boxed{2}$ ある実数 x について $x^2 < 10$」の否定は「すべての実数 x について $x^2 \geqq 10$」

例題

(1)　命題「すべての実数 x について $(x-1)^2 > 0$」の否定を述べよ.

(2)　命題「ある実数 x について $(x-1)^2 > 0$」の否定を述べよ.

解

(1)　命題「すべての実数 x について $(x-1)^2 > 0$」の否定は

「あるの実数 $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{(x-1)^2 \leqq 0}$」

あるいは **「$\boldsymbol{(x-1)^2 \leqq 0}$ となる実数 $\boldsymbol{x}$ が存在する」**

(2)　命題「ある実数 x について $(x-1)^2 > 0$」の否定は

「すべての実数 $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{(x-1)^2 \leqq 0}$」

高校の教科書では，変数 x を含む条件 $p(x)$，$q(x)$ を考え，真理集合で真偽を考えている．
しかし，一般的な論理では変数を考えず，基本的に p，q は変数を含まない命題として考える．
変数を含まない p，q を定数関数のように考えてもよいが，p，q は条件ではなく命題とする．
命題なので真偽が定まる．以下，基本的な論理記号を参考にまとめておく．

★論理積（AND）

2つの命題 p，q が
いずれも真ならば真になり，それ以外のときは偽となるものを

$$p \wedge q$$

と表し，右の表のようになる．

このような表を真理表（しんりひょう）という．

p	q	$p \wedge q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

(補) $P \cap Q$ のイメージ
(注)「 $\cap$ 」は集合の関係，「 $\wedge$ 」は主張の関係と区別する．

★論理和（OR）

2つの命題 p，q が
いずれか一方が真ならば真になり，いずれも偽ならば偽となるものを

$$p \vee q$$

と表し，右の真理表になる．

p	q	$p \wedge q$
真	真	真
真	偽	真
偽	真	真
偽	偽	偽

(補) $P \cup Q$ のイメージ
(注)「 $\cup$ 」は集合の関係，「 $\vee$ 」は主張の関係と区別する．

★論理否定（NOT）

命題 p に対し

p が真ならば偽になり，p が偽ならば真となるものを

$$\neg p$$

と表し，右の真理表のようになる．

p	$\neg p$
真	偽
偽	真

㊢ 集合 P の補集合 $\overline{P}$ のイメージ

㊢ p または $\neg p$ のいずれかは必ず真となる．これを排中律（はいちゅうりつ）と呼ぶ．

㊟「 $\overline{}$ 」は集合の関係，「 $\neg$ 」は主張の関係と区別する．

仮定と結論

2 つの命題 p，q について
命題「もし p であるならば，そのとき q である」を

$$\text{命題「}p \to q\text{」}$$

とかく．この命題で p を仮定（かてい），q を結論（けつろん）という．

㊢ 英語では「if p then q」

㊄「正三角形であるならば，二等辺三角形である」を「正三角形 → 二等辺三角形」とかく．

★命題が真・偽になる条件

2つの命題 p，q について，右の真理表になり

p	q	$p \to q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

1 命題「$p \to q$」が **偽** であるのは $p \land \neg q$

2 命題「$p \to q$」が **真** であるのは $\neg p \lor q$

㋕ 1 命題「$p \to q$」が偽となるのは $p \land \neg q$ のみ

2 $\neg(p \land \neg q) = \neg p \lor q$

㋭ p が偽ならば q の真偽によらず「$p \to q$ は真」となる

㋹ 大雑把なイメージですが，p：晴天である，q：散歩へ行く

p	q	$p \to q$
晴天である	散歩へ行く	真
晴天である	散歩へ行かない	偽
晴天でない	散歩へ行く	真
晴天でない	散歩へ行かない	真

偽となるのは「晴天であるが散歩に行かない」ことのみ．

晴天でなく，雨がふったとしても散歩へ行くのは問題なしという感じ．

㋨ 真を1，偽を0として真理表をつくることもある．

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

例題　命題「$1+1=5$ ならば $\sqrt{2}$ は有理数である」の真偽を答えよ．

㋘ $1+1=5$ が偽なので，この命題は **真**