数学Ｉ　数と式「式の計算」

~高校数学のまとめ~

累乗と指数

文字 a をいくつかかけたものを a の 累乗（るいじょう） という.

a を n 回かけた累乗を a の n 乗といい a^n とかく.

すなわち

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}} = a^n \quad \text{または} \quad \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{ 個}} = a^n$$

a^n と表したとき n を 指数（しすう） という.

とくに a^2 を a の平方（へいほう）, a^3 を a の立方（りっぽう） という.

指数が 1 のときは $a^1 = a$ と 1 は基本的に表記しない.

例 a を 3 回かけた累乗は $a \times a \times a = a^3$ または $a \cdot a \cdot a = a^3$

例 $3 \times 3 = 3 \cdot 3 = 3^2$

例題 次の $\boxed{}$ に適する式や文を入れよ.

b の m 乗を $\boxed{}$ と表し, m を $\boxed{}$ という.

解 b の m 乗を $\boxed{\boldsymbol{b^m}}$ と表し, m を $\boxed{\text{指数}}$ という.

指数法則

a, b を 0 でない実数, m, n は正の整数とするとき, 次が成り立つ.

$\boxed{1}$ $a^m a^n = a^{m+n}$

$\boxed{2}$ $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

$\boxed{3}$ $(ab)^n = a^n b^n$

$\boxed{4}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

例 $\boxed{1}$ $a^2a^3 = a^{2+3} = a^5$

$\boxed{2}$ $(a^3)^2 = a^{3\times2} = (a^2)^3 = a^6$

$\boxed{3}$ $(ab)^2 = a^2b^2$

$\boxed{4}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$

例題 次の計算をせよ.

(1) a^5a^3 (2) $(a^5)^3$ (3) $(a^5b)^3$ (4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

解 指数法則を用いる.

(1) $a^5a^3 = a^{5+3} = \boldsymbol{a^8}$

(2) $(a^5)^3 = a^{5\times3} = \boldsymbol{a^{15}}$

(3) $(a^5b)^3 = (a^5)^3b^3 = \boldsymbol{a^{15}b^3}$

(4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3} = \boldsymbol{\dfrac{8}{27}}$

□単項式

数や文字をかけただけでつくられる式を **単項式**（たんこうしき） という.

㋹ 2, x^2, $2x^2$, $5x^2y$, $5x^2yz$, $\cdots$ を単項式という.

□単項式の次数と係数

$\boxed{1}$ 単項式において かけ合わせた文字の個数を その単項式の **次数**（じすう） という.

ただし，0 以外の数だけの単項式の次数は 0 とし，数 0 の次数は定義しない.

$\boxed{2}$ 単項式において 数の部分をその単項式の **係数**（けいすう） という.

とくに 係数が 1 のときは基本的に表記しない.

$\boxed{3}$ 文字が 2 種類以上あるときは 特定の文字に着目し，

着目しない文字は数とみなすことがある.

㋹ 単項式 $3x^2$ の次数は $x^2 = x \times x$ と文字を 2 個かけているので **2**，係数は **3**

㋹ 単項式 2 の次数は **0**

㋹ 単項式 $5x^2y$ の次数は $x^2y = x \times x \times y$ と文字を 3 個かけているので **3**，係数は **5**

㋹ 単項式 $5x^2y$ は文字 x に着目すると $5yx^2$ と表わせて，次数は **2**，係数は $\boldsymbol{5y}$

㋹ 単項式 $5x^2y$ は文字 y に着目すると次数は **1**，係数は $\boldsymbol{5x^2}$

例題

（1） 単項式 $-5x^2$ の次数と係数をそれぞれ求めよ.

（2） 単項式 $56ax^3$ の次数と係数をそれぞれ求めよ.

（3） 単項式 $56ax^3$ を文字 x に着目するとき，次数と係数をそれぞれ求めよ.

㊫

（1） 単項式 $-5x^2$ の **次数は 2** と **係数は -5**

（2） 単項式 $56ax^3$ の **次数は 4** と **係数は 56**

（3） 単項式 $56ax^3$ を文字 x に着目するとき，**次数は 3** と **係数は $\boldsymbol{56a}$**

多項式と整式

単項式の和として表される式を **多項式**（たこうしき） という.

単項式と多項式を合わせて **整式**（せいしき） という.

単項式を項が 1 つの多項式として，多項式と整式を同じ意味で用いる.

(例) 3 つの単項式 x^2，$3x$，2 の和として表される式 x^2+3x+2 は多項式である.

(例) 3 つの単項式 x^2，$-3x$，-2 の和として表される式 $x^2+(-3x)+(-2)=x^2-3x-2$ は多項式である.

単項式 x^2，$3x$ や多項式 x^2+3x+2，x^2-3x-2 は整式である.

(補) x^2 は単項式であり，（多項式ではないとする場合もあるようだが）多項式でもあるとする.

整式の項

整式について

1. 和で分けられた単項式を整式の **項**（こう） という.
2. 文字を含まない項を整式の **定数項**（ていすうこう） という.
3. 文字の部分が同じである項を **同類項**（どうるいこう） という.

同類項は係数の和を計算して 1 つの項にまとめることができる.

(例) 整式 x^2+3x+2 の項は $\boldsymbol{x^2}$ と $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$ と $\mathbf{2}$ で，定数項は $\mathbf{2}$.

(例) 整式 $x^2+2x+3+4x^2$ の同類項は $\boldsymbol{x^2}$ と $\mathbf{4}\boldsymbol{x^2}$

$x^2+4x^2=(1+4)x^2=5x^2$ と計算して $\underset{\sim}{x^2}+2x+3+\underset{\sim}{4x^2}=\underset{\sim}{5x^2}+2x+3$

例題 次の整式の同類項をまとめ，整理せよ.

(1) $3x^2+2x-1-2x^2-5x+2$

(2) $4a^2+3ab+2b^2-3a^2-2ab+b^2$

(解)

(1) $3x^2+2x-1-2x^2-5x+2=(3-2)x^2+(2-5)x+(-1+2)=\boldsymbol{x^2-3x+1}$

(2) $4a^2+3ab+2b^2-3a^2-2ab+b^2=(4-3)a^2+(3-2)ab+(2+1)b^2=\boldsymbol{a^2+ab+3b^2}$

整式の次数

同類項をまとめて整理した整式において

最も次数の高い項の次数をこの整式の **次数** という.

とくに 次数が n の整式を **n 次式** という.

㊷ 整式 $5x^2+2x+3$ は最も次数の高い項が $5x^2$ なので，次数は **2** で **2** 次式

㊷ 整式 $5x^2y+3xy^3+2y^2$ について

最も次数の高い項が $3xy^3$ なので，次数は **4** で **4** 次式

また，文字 x に着目する場合は $5yx^2+3y^3x+2y^2$

最も次数の高い項が $5yx^2$ なので，次数は **2** で $\boldsymbol{x}$ **の 2** 次式

降べきの順，昇べきの順

整式をある文字に着目して

$\boxed{1}$ 項の次数が低くなる順に整理することを**降(こう)べきの順**に整理するという.

$\boxed{2}$ 項の次数が高くなる順に整理することを**昇(しょう)べきの順**に整理するという.

㊷ 整式 $2x+x^3+3x^2+1$ を文字 x に着目して

$\boxed{1}$ 降べきの順に整理すると $\boldsymbol{x^3+3x^2+2x+1}$

$\boxed{2}$ 昇べきの順に整理すると $\boldsymbol{1+2x+3x^2+x^3}$

(補) 整式は降べきの順にして考えることが多い.

$\boxed{\text{例題}}$ 次の整式を［ ］の文字について降べきの順に整理せよ．また，［ ］の文字については何次式になるか.

(1) $3x^3+2x^2+x+1-x^3+x^2+x$ ［x］

(2) $a^2+3ab-2b^2-3a-b+2$ ［a］

(解)

(1) $3x^3+2x^2+x+1-x^3+x^2=(1-1)x^3+(2+1)x^2+x+1=\boldsymbol{3x^2+x+1}$

よって，x について **2** 次式

(2) $a^2+3ab-2b^2+2a-b+2=\boldsymbol{a^2+(3b+2)a-2b^2-b+2}$

よって，a について **2** 次式

□展開

いくつかの整式の積の形をした式において

積を計算して 1 つの整式に表すことを その式を **展開(てんかい)する** という.

□分配法則

$\boxed{1}$ $a(x+y)=ax+ay$

$\boxed{2}$ $(x+y)a=ax+ay$

$\boxed{3}$ $a(x+y+z)=ax+ay+az$

$\boxed{4}$ $(x+y+z)a=ax+ay+az$

例 $\boxed{1}$ $3(x+y)=3x+3y$

$\boxed{2}$ $(x+y)z=xz+yz$

$\boxed{3}$ $3(x+y+z)=3x+3y+3z$

$\boxed{4}$ $(x+y+z)w=xw+yw+zw$

□整式の乗法

$\boxed{1}$ $(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by$

$\boxed{2}$ $(a+b+c)(x+y+z)=ax+ay+az+bx+by+bz+cx+cy+cz$

例 $\boxed{1}$ $(a+3)(x+2)=ax+2a+3x+6$

$\boxed{2}$ $(a+b+1)(x+y+2)=ax+ay+2a+bx+by+2b+x+y+2$

例題 次の式を展開せよ.

(1) $3(x+y)$

(2) $(x+2)(3y+4z)$

解

(1) $3(x+y)=\boldsymbol{3x+3y}$

(2) $(x+2)(3y+4z)=\boldsymbol{3xy+4xz+6y+8z}$

□平方式の展開

$\boxed{1}$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\boxed{2}$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

考 $\boxed{1}$ $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\boxed{2}$ $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

別 $\boxed{1}$ で b を $-b$ とすることを考えて

$(a-b)^2 = \{a+(-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

例 $\boxed{1}$ $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$\boxed{2}$ $(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

□和と差の積の展開

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

考 $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

例 $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

$\boxed{\text{例題}}$ 次の式を展開せよ．

(1) $(2x-3y)^2$

(2) $(2x+3y)(2x-3y)$

解

(1) $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = \boldsymbol{4x^2 + 12xy + 9y^2}$

(2) $(2x+3y)(2x-3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = \boldsymbol{4x^2 - 9y^2}$

□1次式の積の展開

$\boxed{1}$ $(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

$\boxed{2}$ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ $(ac \neq 0)$

㊢ $\boxed{1}$ $(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+\beta x+\alpha x+\alpha\beta=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

$\boxed{2}$ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+adx+bcx+bd=acx^2+(ad+bc)x+bd$

㊖ $\boxed{1}$ $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+2\cdot 3=x^2+5x+6$

$\boxed{2}$ $(2x+3)(4x+5)=2\cdot 4x^2+(2\cdot 5+3\cdot 4)x+3\cdot 5=8x^2+22x+15$

例題　次の式を展開せよ.

(1)　$(x+7)(x-1)$

(2)　$(5x+4)(3x+2)$

㊫

(1)　$(x+7)(x-1)=x^2+(7-1)x+7\cdot(-1)=\boldsymbol{x^2+6x-7}$

(2)　$(5x+4)(3x+2)=5\cdot 3x^2+(5\cdot 2+4\cdot 3)x+4\cdot 2=\boldsymbol{15x^2+22x+8}$

3項の和の平方式の展開

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

㊟ $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$
$= a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+b^2+c^2$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

㊀ $(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2$
$= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2$
$= a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$
$= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

㊫ $(x+y+1)^2 = x^2+y^2+1^2+2xy+2\cdot y\cdot 1+2\cdot 1\cdot x$
$= x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$

例題　次の式を展開せよ.

(1)　$(x+y+2)^2$

(2)　$(x+3y-z)^2$

㊁

(1)　$(x+y+2)^2 = x^2+y^2+2^2+2xy+2\cdot y\cdot 2+2\cdot 2\cdot x$
$= \boldsymbol{x^2+y^2+2xy+4x+4y+4}$

(2)　$(x+3y-z)^2 = \{x+3y+(-z)\}^2$
$= x^2+(3y)^2+(-z)^2+2x\cdot 3y+2\cdot(3y)\cdot(-z)+2\cdot(-z)\cdot x$
$= \boldsymbol{x^2+9y^2+z^2+6xy-6yz-2zx}$

★立方式の展開

$\boxed{1}$ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$\boxed{2}$ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

考 $\boxed{1}$ $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)$
$=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$
$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$\boxed{2}$ $(a-b)^3=\{a+(-b)\}^3$
$=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$ （$\because$ $\boxed{1}$）
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

例 $\boxed{1}$ $(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=x^3+6x^2+12x+8$

$\boxed{2}$ $(x-2)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3=x^3-6x^2+12x-8$

例題　次の式を展開せよ．

(1)　$(x+1)^3$

(2)　$(x-2y)^3$

解

(1)　$(x+1)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2+1^3=\boldsymbol{x^3+3x^2+3x+1}$

(2)　$(x-2y)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3=\boldsymbol{x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3}$

☆和と差の平方の計算公式

$\boxed{1}$ $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

$\boxed{2}$ $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

考 左辺を展開すると右辺になる．

$\boxed{1}$ $(a+b)^2+(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)=2(a^2+b^2)$

$\boxed{2}$ $(a+b)^2-(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)=4ab$

例 $\boxed{1}$ $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x^2+1)$

$\boxed{2}$ $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$

例題 次の式を展開せよ．

(1) $(3x+2y)^2+(3x-2y)^2$

(2) $(3x+2y)^2+(3x-2y)^2$

解

(1) $(3x+2y)^2+(3x-2y)^2=2\{(3x)^2+(2y)^2\}=2(9x^2+4y^2)=\boldsymbol{18x^2+8y^2}$

(2) $(3x+2y)^2+(3x-2y)^2=4\cdot 3x\cdot 2y=\boldsymbol{24xy}$

☆展開公式

$\boxed{1}$ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$\boxed{2}$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

㊢ 左辺を展開すると右辺になる.

$$\boxed{1}\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2 \\ \qquad +a^2b-ab^2+b^3 \\ =a^3 \qquad\qquad +b^3$$

$$\boxed{2}\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2 \\ \qquad -a^2b-ab^2-b^3 \\ =a^3 \qquad\qquad -b^3$$

㊇ $\boxed{1}$ $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1^3=x^3+1$

$\boxed{2}$ $(x-2)(x^2+2x+4)=(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)=x^3-2^3=x^3-8$

例題　次の式を展開せよ.

(1)　$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

(2)　$(2x-3y)(4x^2+12xy+9y^2)$

㊮

(1)　$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=x^3+(2y)^3=\boldsymbol{x^3+8y^3}$

(2)　$(2x-3y)(4x^2+12xy+9y^2)=(2x)^3-(3y)^3=\boldsymbol{8x^3-27y^3}$

□因数分解

1つの整式を1次以上の整式の積の形に表すことを

もとの式を **因数分解**（いんすうぶんかい） するという．

このとき，積を作っている各式をもとの式の因数という．

(補) 大雑把（おおざっぱ） な説明だが，「展開」の計算の逆が「因数分解」の計算である．

□共通因数でくくる

整式の各項に共通な因数があるとき，その因数でくくることができる．

すなわち

[1] $ax + ay = a(x + y)$

[2] $ax + ay + az = a(x + y + z)$

(例) [1] $5x + 5y = 5(x + y)$

[2] $5x + 5y + 5z = 5(x + y + z)$

例題 次の式を因数分解せよ．

(1) $ab + bc$

(2) $abc - acd$

(3) $x^2 + 3x$

(解)

(1) $ab + bc = \boldsymbol{b(a + c)}$

(2) $abc - acd = \boldsymbol{ac(b - d)}$

(3) $x^2 + 3x = \boldsymbol{x(x + 3)}$

□平方の差の因数分解

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

㊂ 右辺を展開すると左辺になる.

㊀ $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$

□平方式への因数分解

$\boxed{1}$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$\boxed{2}$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

㊂ 右辺を展開すると左辺になる.

㊀ $\boxed{1}$ $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x+3)^2$

$\boxed{2}$ $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x-3)^2$

例題　次の式を因数分解せよ.

(1)　$9x^2 - 4y^2$

(2)　$9x^2 + 12xy + 4y^2$

(3)　$9x^2 - 12xy + 4y^2$

㊁

(1)　$9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 = \boldsymbol{(3x-2y)(3x+2y)}$

(2)　$9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = \boldsymbol{(3x+2y)^2}$

(3)　$9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = \boldsymbol{(3x-2y)^2}$

□ 2 次式の因数分解

$$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$$

考 右辺を展開すると左辺になる.

例 $x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\cdot3=(x+2)(x+3)$

2 次式の因数分解 (たすきがけ)

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)\quad(ac\neq0)$$

$$\left[\begin{array}{ccccr} a & & b & \longrightarrow & bc \\ c & & d & \longrightarrow & ad \\ \cline{5-5} & & & & ad+bc \end{array}\right]$$

考 右辺を展開すると左辺になる.

例 $10x^2+7x-12=\boldsymbol{(2x+3)(5x-4)}$

$$\left[\begin{array}{ccccr} 2 & & 3 & \longrightarrow & 15 \\ 5 & & -4 & \longrightarrow & -8 \\ \cline{5-5} & & & & 7 \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{例題}}$ 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2+4x-21$

(2) $5x^2+13x+6$

解

(1) $x^2+4x-21=x^2+(7-3)x+7\cdot(-3)=\boldsymbol{(x+7)(x-3)}$

(2) $5x^2+13x+6=\boldsymbol{(x+2)(5x+3)}$

$$\left[\begin{array}{ccccr} 1 & & 2 & \longrightarrow & 10 \\ 5 & & 3 & \longrightarrow & 3 \\ \cline{5-5} & & & & 13 \end{array}\right]$$

★3項の和の平方式への因数分解

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$$

㊀考 右辺を展開すると左辺になる．

別 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca = \underline{a^2+b^2+2ab}+\underline{2bc+2ca}+c^2$

$= \underline{(a+b)^2}+\underline{2(a+b)}+c^2$

$= \{(a+b)+c\}^2$

$= (a+b+c)^2$

例 $x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx = x^2+(2y)^2+(3z)^2+2\cdot x\cdot 2y+2\cdot 2y\cdot 3z+2\cdot 3z\cdot x$

$= (x+2y+3z)^2$

別 $x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx = \underline{x^2+4y^2+4xy}+\underline{6zx+12yz}+9z^2$

$= \underline{(x+2y)^2}+\underline{6(x+2y)z}+(3z)^2$

$= \{(x+2y)+3z\}^2$

$= \boldsymbol{(x+2y+3z)^2}$

例題 次の式を因数分解せよ．

$x^2+y^2+1+2xy+2x+2y$

解 $x^2+y^2+1+2xy+2x+2y = x^2+y^2+1^2+2xy+2\cdot y\cdot 1+2\cdot 1\cdot x$

$= \boldsymbol{(x+y+1)^2}$

別 $x^2+y^2+1+2xy+2x+2y = \underline{x^2+y^2+2xy}+\underline{2x+2y}+1$

$= \underline{(x+y)^2}+\underline{2(x+y)}+1$

$= \{(x+y)+1\}^2$

$= \boldsymbol{(x+y+1)^2}$

★立方式への因数分解

$\boxed{1}$ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$\boxed{2}$ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

考 右辺を展開すると左辺になる.

例 $\boxed{1}$ $x^3+6x^2+12x+8=x^2+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=(x+2)^3$

$\boxed{2}$ $x^3-6x^2+12x-8=x^2-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3=(x-2)^3$

$\boxed{\text{例題}}$ 次の式を因数分解せよ.

(1) x^3+3x^2+3x+1

(2) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

解

(1) $x^3+3x^2+3x+1=\boldsymbol{(x+1)^3}$

(2) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3=\boldsymbol{(x-2y)^3}$

★立方の和または差の因数分解

$\boxed{1}$ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\boxed{2}$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

㊝ $\boxed{1}$ $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$

$\boxed{2}$ $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

例題 次の式を因数分解せよ.

(1) x^3+1

(2) x^3-64y^3

㊫

(1) $x^3+1=x^3+1^3=\boldsymbol{(x+1)(x^2-x+1)}$

(2) $x^3-64y^3=x^3-(4y)^3=\boldsymbol{(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)}$

☆n 乗の差の因数分解

n を 2 以上の自然数とする.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

㊮ 右辺を展開すると左辺になる.

㊷ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

㊷ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

㊷ $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

㊷ $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b^2 + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

★n 乗の和の因数分解

n を 3 以上の奇数とする.

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

㊮ 右辺を展開すると左辺になる.

㊷ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

㊷ $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

㊷ $a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

例題　次の式を因数分解せよ.

(1)　$x^5 - 1$

(2)　$x^5 + 1$

㊫

(1)　$x^5 - 1 = x^5 - 1^5 = \boldsymbol{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$

(2)　$x^5 + 1 = x^5 + 1^5 = \boldsymbol{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}$

★3次の因数分解公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

㊔ 右辺を展開すると左辺になる．

㊔ $\underline{a^3+b^3}+c^3-3abc=\underline{(a+b)^3-3ab(a+b)}+c^3-3abc$

$$\begin{aligned}
&=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc\\
&=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab\{(a+b)+c\}\\
&=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}\\
&=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ca+bc-3ab)\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}$$

㊡ $x^3+y^3+1-3xy=x^3+y^3+1^3-3\cdot x\cdot y\cdot 1$

$$\begin{aligned}
&=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-y-x)\\
&=(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)
\end{aligned}$$

例題　次の式を因数分解せよ．

$x^3-y^3-1+3xy$

㊦

$$\begin{aligned}
x^3-y^3-1+3xy&=x^3+(-y)^3+(-1)^3-3x(-y)(-1)\\
&=(x-y-1)(x^2+y^2+1+xy-y+x)\\
&=\boldsymbol{(x-y-1)(x^2+y^2+xy+x-y+1)}
\end{aligned}$$

複2次式

4次の整式の中で奇数の次数の項を含まないものを **複2次式**（ふく）という.

すなわち ax^4+bx^2+c（a，b，c は定数，$a \neq 0$）の形で表される整式を

複2次式 という.

㊞ x^4+x^2+1，x^4+4 はいずれも複2次式.

複2次式の因数分解

複2次式 ax^4+bx^2+c の因数分解は次のようにできる.

$\boxed{1}$ $x^2=t$ とおき t の2次式 at^2+bt+c とみる

$\boxed{2}$ 平方の差 $(x^2+p)^2-(qx)^2$ に変形する

例 $\boxed{1}$ x^4-5t^2+4 を因数分解する.

$x^2=t$ とおくと $x^4-5x^2+4=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$

すなわち $x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

$\boxed{2}$ x^4+x^2+1 を因数分解する.

$x^2=t$ とおくと $x^4+x^2+1=t^2+t+1$ とすぐに因数分解できない.

そこで，平方の差の形を作ることを考えて

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=\{(x^2+1)-x\}\{(x^2+1)+x\}$$
$$=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

$\boxed{\text{例題}}$ 次の式を因数分解せよ.

(1) x^4-2x^2+1

(2) x^4+4

解

(1) $x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=\{(x+1)(x-1)\}^2$

$$=\boldsymbol{(x-1)^2(x+1)^2}$$

(2) $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$$=\{(x^2+2)-2x\}\{(x^2+2)+2x\}$$
$$=\boldsymbol{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}$$

☆２文字の対称式

２つの文字の整式で，その２つの文字を入れかえても値が変わらない式を

その２文字の 対称式（たいしょうしき） という．

とくに その２文字の 和 と 積 を 基本対称式（きほんたいしょうしき） という．

すなわち $f(x,\,y)$ を x と y に関する式として

$$f(x,\,y)=f(y,\,x)$$

が成り立つとき $f(x,\,y)$ を x と y の 対称式 という．

とくに $x+y$ と xy を 基本対称式 という．

㊎ $f(x,\,y)=x^2+y^2$

について

$$x^2+y^2=y^2+x^2 \quad \text{すなわち} \quad f(x,\,y)=f(y,\,x)$$

が成り立つ．

つまり x^2+y^2 は x と y の対称式である．

☆２文字の対称式の性質

２文字の対称式は 基本対称式だけで表すことができる．

すなわち x と y の 対称式 は $x+y$ または xy だけで表すことができる．

㊎ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

㊎ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

例題　$x+y=2$，$xy=-1$ のとき，次の値を求めよ．

(1)　x^2+y^2

(2)　x^3+y^3

㊈

(1)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2(-1)=\mathbf{6}$

(2)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=2^3-3\cdot2(-1)=\mathbf{14}$

★3文字の対称式

3つの文字の整式で

その3つの文字のどの2つの文字を入れかえても値が変わらない式を

その3文字の **対称式** という.

とくに その3文字の和 と 2文字の積の和 と 積 を **基本対称式** という.

すなわち $f(x, y, z)$ を x と y と z に関する式として

$$f(x, y, z)=f(x, z, y)=f(y, x, z)$$
$$=f(y, z, x)=f(z, x, y)=f(z, y, x)$$

が成り立つとき $f(x, y, z)$ を x と y と z の**対称式** という.

とくに $x+y+z$ と $xy+yz+zx$ と xyz を **基本対称式** という.

例 $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$

について

$$x^2+y^2+z^2=x^2+z^2+y^2=y^2+x^2+z^2=y^2+z^2+x^2=z^2+x^2+y^2=z^2+y^2+x^2$$

すなわち

$$f(x, y, z)=f(x, z, x)=f(y, x, z)=f(y, z, x)=f(z, x, y)=f(z, y, x)$$

が成り立つ.

つまり $x^2+y^2+z^2$ は x と y と z の対称式である.

★3文字の対称式の性質

3文字の対称式 は **基本対称式だけ**で表すことができる.

すなわち x と y と z の 対称式 は

$x+y+z$ または $xy+yz+zx$ または xyz だけで表すことができる.

例 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

例 $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz$

補 x と y と z の3文字の対称式は，z を固定する（定数とみる）と，x と y の2文字の対称式となる.

例題　$x+y+z=3$，$xy+yz+zx=1$ のとき，次の値を求めよ.

$x^2+y^2+z^2$

解 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=3^2-2\cdot1=\mathbf{4}$

★ 2 文字の交代式

2 つの文字の整式で

その 2 つの文字を入れ替えて (-1) 倍して値が変わらない式を

その 2 文字の 交代式（こうたいしき） という．

すなわち $f(x,\,y)$ を x と y に関する式として

$$f(x,\,y)=-f(y,\,x)$$

が成り立つとき $f(x,\,y)$ を x と y の 交代式 という．

㊞例 $f(x,\,y)=x^3-y^3$

について

$$x^3-y^3=-(y^3-x^3) \quad \text{すなわち} \quad f(x,\,y)=-f(y,\,x)$$

が成り立つ．

つまり x^3-y^3 は x と y の交代式である．

㊞補 $f(x,\,y)=x^3-y^3$ において $x=y$ とすると $f(x,\,x)=x^3-x^3=0$ となる．

このように $f(x,\,y)$ で $x=y$ として $f(x,\,x)=0$ が常に成り立つならば $f(x,\,y)$ は交代式だと判断できる．

★ 2 文字の交代式の性質

2 文字の交代式 は（2 つの文字の差）×（対称式） と表すことができる．

すなわち x と y の交代式は $(x-y)\times$（対称式） のように表すことができる．

また x と y の交代式を 2 乗すると x と y の対称式 になる．

例 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

交代式 x^3-y^3 を 2 乗した $(x^3-y^3)^2$ は対称式である．

話 $x-y$ を基本交代式と言いたいが，定義はされていない．

例題 $x+y=2$，$xy=-1$ のとき，次の値を求めよ．

$x-y$

解 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=2^2-4\cdot(-1)=8$

よって $\boldsymbol{x-y=\pm 2\sqrt{2}}$