

第5問 (選択問題) (配点 20)

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{OC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

点Oを原点とする座標空間に4点A(2, 7, -1), B(3, 6, 0), C(-8, 10, -3), D(-9, 8, -4)がある。A, Bを通る直線を l_1 とし, C, Dを通る直線を l_2 とする。

(1)

$$\vec{AB} = \left(\boxed{1}, \boxed{-1}, \boxed{1} \right) \quad (2点)$$

であり, $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \boxed{0}$ である。

(2点) 〃 このおかげで後半の計算が
やりやすい

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{(1, -1, 1)} \quad \text{ア, イ, エ}$$

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) = -1 + 2 - 1 = 0$$

$$= \boxed{0} \quad \text{オ}$$

$$\therefore \vec{AB} \perp \vec{CD}$$

(2) 花子さんと太郎さんは、点Pが l_1 上を動くとき、 $|\vec{OP}|$ が最小となるPの位置について考えている。

Pが l_1 上にあるので、 $\vec{AP} = s\vec{AB}$ を満たす実数sがあり、 $\vec{OP} = \boxed{(2)}$ が成り立つ。

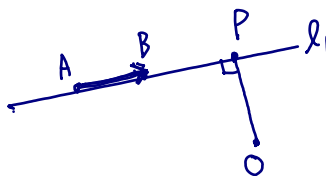
(3点)

$|\vec{OP}|$ が最小となるsの値を求めればPの位置が求まる。このことについて、花子さんと太郎さんが話をしている。

花子: $|\vec{OP}|^2$ が最小となるsの値を求めればよいね。

太郎: $|\vec{OP}|$ が最小となるときの直線OPと l_1 の関係に着目してもよさそうだよ。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)



(B11)

$$\begin{aligned} |\vec{OP}|^2 &= |\vec{OA} + s\vec{AB}|^2 \\ &= |\vec{OA}|^2 + 2s\vec{OA} \cdot \vec{AB} + s^2|\vec{AB}|^2 \\ &= 54 + 2s(-6) + s^2 \cdot 3 \\ &= 3s^2 - 12s + 54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + \vec{AP} \\ &= \vec{OA} + s\vec{AB} \quad (2)カ \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s+2 \\ -s+7 \\ s-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{OP}|^2 &= (s+2)^2 + (-s+7)^2 + (s-1)^2 \\ &= \boxed{3s^2 - 12s + 54} \\ &= 3(s-2)^2 + 42 \end{aligned}$$

$\boxed{s=2}$ のとき $|\vec{OP}|$ は最小になる $s=2$

(補) $|\vec{OP}|$ の最小値は $\sqrt{42}$

$|\vec{OP}|^2 = \boxed{3}s^2 - \boxed{12}s + \boxed{54}$ である。

また、 $|\vec{OP}|$ が最小となるとき、直線 OP と l_1 の関係に着目すると $\boxed{\text{①}}$ が成り立つことがわかる。

花子さんの考え方でも、太郎さんの考え方でも、 $s = \boxed{2}$ のとき $|\vec{OP}|$ が最小となることがわかる。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| ① $s\vec{AB}$ | ① $s\vec{OB}$ |
| ② $\vec{OA} + s\vec{AB}$ | ③ $(1-2s)\vec{OA} + s\vec{OB}$ |
| ④ $(1-s)\vec{OA} + s\vec{AB}$ | |

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

- | | |
|---|---------------------------------|
| ① $\vec{OP} \cdot \vec{AB} > 0$ | ① $\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$ |
| ② $\vec{OP} \cdot \vec{AB} < 0$ | ③ $ \vec{OP} = \vec{AB} $ |
| ④ $\vec{OP} \cdot \vec{AB} = \vec{OB} \cdot \vec{AP}$ | ⑤ $\vec{OB} \cdot \vec{AP} = 0$ |
| ⑥ $\vec{OP} \cdot \vec{AB} = \vec{OP} \vec{AB} $ | |

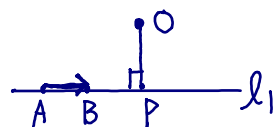
(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

$|\vec{OP}|$ が最小になるとき

$OP \perp l_1$

よって $\vec{OP} \perp \vec{AB}$

よって $\boxed{\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0}$ ①シ



$$\begin{aligned} \vec{OP} \cdot \vec{AB} &= (\vec{OA} + s\vec{AB}) \cdot \vec{AB} \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{AB} + s|\vec{AB}|^2 \\ &= 2 - 7 - 1 + s\{1^2 + (-1)^2 + 1^2\} \\ &= -6 + 3s = 0 \\ \therefore \boxed{s = 2} \text{シ} \end{aligned}$$

数学II・数学B

(3) 点Pが l_1 上を動き、点Qが l_2 上を動くとする。このとき、線分PQの長さ

が最小になるPの座標は(-3 , 12 , -6), Qの座標は

(-7 , 12 , -2)である。

(両方正角座標点)

s, t を実数とせよ

$$\vec{OP} = \vec{OA} + s\vec{AB}$$

$$\vec{OQ} = \vec{OC} + t\vec{CD}$$

と表せよ

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= \vec{OQ} - \vec{OP} \\ &= \vec{AC} + t\vec{CD} - s\vec{AB} \end{aligned}$$

PQが最小になる条件は

$$PQ \perp l_1 \text{ かつ } PQ \perp l_2$$

すなわち

$$\vec{PQ} \perp \vec{AB} \text{ かつ } \vec{PQ} \perp \vec{CD}$$

よって

$$\vec{PQ} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ かつ } \vec{PQ} \cdot \vec{CD} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \cdot \vec{AB} &= (\vec{AC} + t\vec{CD} - s\vec{AB}) \cdot \vec{AB} \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AC} + t \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}_0 - s|\vec{AB}|^2 \\ &= -15 - 3s = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore s = -5$$

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \cdot \vec{CD} &= (\vec{AC} + t\vec{CD} - s\vec{AB}) \cdot \vec{CD} \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{CD} + t|\vec{CD}|^2 - s \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}_0 \\ &= 6 + 6t = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore t = -1$$

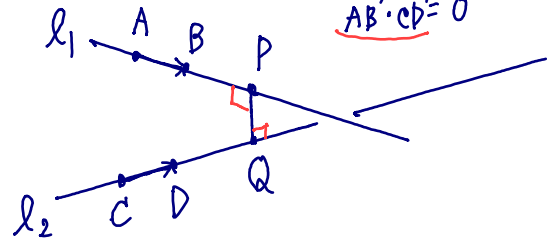
$$\vec{OP} = \vec{OA} - 5\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OQ} = \vec{OC} - \vec{CD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よってPQが最小になるのは P(-3, 12, -6), Q(-7, 12, -2) //

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$$



$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= (-10) + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \\ &= -10 - 3 - 2 \\ &= -15 \end{aligned}$$

$$|\vec{AB}|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3$$

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{CD} &= (-10)(-1) + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) \\ &= 10 - 6 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{CD}|^2 &= (-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 \\ &= 1 + 4 + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{別1} |\vec{PQ}|^2 &= |\vec{AC} + t\vec{CD} - s\vec{AB}|^2 \\ &= |\vec{AC}|^2 + t^2|\vec{CD}|^2 + s^2|\vec{AB}|^2 + 2t\vec{AC} \cdot \vec{CD} - 2s\vec{AB} \cdot \vec{AC} - 2st\vec{AB} \cdot \vec{CD} \\ &= 113 + 6t^2 + 3s^2 + 12t + 30s \\ &= 3s^2 + 30s + 6t^2 + 12t + 113 \\ &= 3 \underbrace{(s+5)^2}_{0 \text{ 以上}} + 6 \underbrace{(t+1)^2}_{0 \text{ 以上}} + 32 \end{aligned}$$

$$|\vec{PQ}| \text{ が最小になるのは } s = -5 \text{ かつ } t = -1$$

補) PQの最小値は $|\vec{PQ}| = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ の大きさ
よって $|\vec{PQ}| = 4\sqrt{2}$