

第4問 (選択問題) (配点 20)

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 14 \end{cases}$$

(1) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_{n+1} - a_n = 14 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。

$a_1 = 10$ のとき、 $a_2 = \boxed{24}$ 、 $a_3 = \boxed{38}$ である。

数列 $\{a_n\}$ の一般項は、初項 a_1 を用いて

$$a_n = a_1 + \boxed{14} (n - 1)$$

と表すことができる。

(2点)

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 14 = 10 + 14 = \boxed{24} \text{ (アイ)} \\ a_3 &= a_2 + 14 = 24 + 14 = \boxed{38} \text{ (ウエ)} \end{aligned}$$

(アイ, ウエ両方正解で2点)

数列 $\{a_n\}$ は公差14の等差数列であるから

$$a_n = a_1 + \boxed{14} (n-1)$$

初

(2) 数列 $\{b_n\}$ が

$$2b_{n+1} - b_n + 3 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。

数列 $\{b_n\}$ の一般項は、初項 b_1 を用いて

$$b_n = \left(b_1 + \boxed{3} \right) \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \right)^{n-1} - \boxed{3}$$

(3点)

と表すことができる。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{2} b_n - \frac{3}{2} \\ \left(- \right) \quad & \underline{d = \frac{1}{2} d - \frac{3}{2} \Leftrightarrow d = -3} \\ b_{n+1} - d &= \frac{1}{2} (b_n - d) \end{aligned}$$

変形して

$$b_{n+1} + 3 = \frac{1}{2} (b_n + 3)$$

数列 $\{b_n + 3\}$ は初項 $b_1 + 3$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n + 3 = (b_1 + 3) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

よって

$$b_n = \boxed{(b_1 + 3) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - 3}$$

キクコ

(3) 太郎さんは

$$(c_n + 3)(2c_{n+1} - c_n + 3) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす数列 $\{c_n\}$ について調べることにした。

① $n=1$ とし $(c_1 + 3)(2c_2 - c_1 + 3) = 0$
 $c_1 = 5$ のとき $8(2c_2 - 2) = 0$
 $\therefore c_2 = 1$ ※

(i)

• 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし、 $c_1 = 5$ のとき、 $c_2 = \boxed{1}$ である。
(1点)

• 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし、 $c_3 = -3$ のとき、 $c_2 = \boxed{-3}$ 、 $c_1 = \boxed{-3}$ である。
(シ、セツ両方正解で2点)

① $n=2$ とし $(c_2 + 3)(2c_3 - c_2 + 3) = 0$
 $c_3 = -3$ のとき $(c_2 + 3)(-c_2 - 3) = 0$
 $-(c_2 + 3)^2 = 0 \quad \therefore c_2 = -3$
同様にシ、セツ

(ii) 太郎さんは、数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし、 $c_3 = -3$ となる場合について考えている。

$c_3 = -3$ のとき、 c_4 がどのような値でも

$$(c_3 + 3)(2c_4 - c_3 + 3) = 0$$

が成り立つ。

• 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし、 $c_3 = -3$ 、 $c_4 = 5$ のとき

$$c_1 = \boxed{-3}, c_2 = \boxed{-3}, c_3 = -3, c_4 = 5, c_5 = \boxed{1}$$

である。

• 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし、 $c_3 = -3$ 、 $c_4 = 83$ のとき

$$c_1 = \boxed{-3}, c_2 = \boxed{-3}, c_3 = -3, c_4 = 83, c_5 = \boxed{40}$$

である。

(タ、チツ両方正解で3点)

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

- (iii) 太郎さんは(i)と(ii)から、 $c_n = -3$ となることがあるかどうかに着目し、次の命題Aが成り立つのではないかと考えた。

命題A 数列 $\{c_n\}$ が①を満たし、 $c_1 \neq -3$ であるとする。このとき、すべての自然数 n について $c_n \neq -3$ である。

命題Aが真であることを証明するには、命題Aの仮定を満たす数列 $\{c_n\}$ について、③を示せばよい。 数学的帰納法

実際、このようにして命題Aが真であることを証明できる。

念のため下で示しておきます

$$\begin{aligned} c_1 \neq -3 &\Rightarrow c_2 \neq -3 \\ c_2 \neq -3 &\Rightarrow c_3 \neq -3 \\ &\vdots \\ c_k \neq -3 &\Rightarrow c_{k+1} \neq -3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

テについては、最も適当なものを、次の①～④のうちから一つ選べ。

- ① $c_2 \neq -3$ かつ $c_3 \neq -3$ であること
- ② $c_{100} \neq -3$ かつ $c_{200} \neq -3$ であること
- ③ $n = k$ のとき $c_n \neq -3$ が成り立つと仮定すると、 $n = k + 1$ のときも $c_n \neq -3$ が成り立つこと
- ④ $n = k$ のとき $c_n = -3$ が成り立つと仮定すると、 $n = k + 1$ のときも $c_n = -3$ が成り立つこと

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

$c_1 \neq -3$ とする

$$\text{①を} n=k \text{ とし } (c_k + 3)(2c_{k+1} - c_k + 3) = 0$$

$c_{k+1} = -3$ と仮定すると

$$(c_k + 3)(-c_k - 3) = 0$$

$$-(c_k + 3)^2 = 0$$

$$\therefore c_k = -3$$

すなわち $c_{k+1} = -3$ ならば $c_k = -3$... ③

対偶を考えると $c_k \neq -3$ ならば $c_{k+1} \neq -3$ ($k=1, 2, 3, \dots$)

よって命題Aは真である。

(iv) 次の(I), (II), (III)は, 数列 $\{c_n\}$ に関する命題である。

- (I) $c_1 = 3$ かつ $c_{100} = -3$ であり, かつ①を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。
- (II) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = -3$ であり, かつ①を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。
- (III) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = 3$ であり, かつ①を満たす数列 $\{c_n\}$ がある。

(I), (II), (III)の真偽の組合せとして正しいものは ④ である。
(4点)

ト の解答群

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(I)	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(II)	真	真	偽	真	真	偽	偽
(III)	真	偽	真	偽	真	偽	偽

(I) ② を考えて

$c_{100} = -3$ だとすると $c_{99} = -3, c_{98} = -3, \dots, c_1 = -3$
 $c_1 = 3$ とはならないので 偽

(II) $c_1 = c_2 = \dots = c_{100} = -3$ を満たすことがあつた 真

(III) (3)(ii) を考えて $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = 3$ を満たすことがあつた 真

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ だと } n=99 \text{ とすると } (c_{99} + 3)(2c_{100} - c_{99} + 3) = 0 \\ c_{99} = 9 \text{ とは } \left\{ \begin{array}{l} 2(2c_{100} - 6) = 0 \\ \therefore c_{100} = 3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$c_3 = -3$ のとき c_4 などのような値でも成り立つが, 一般化して
 $c_m = -3$ のとき c_{m+1} などのような値でも成り立つ ← $\textcircled{1}$ だと $n=m+1$ と
 $(c_{m+1} + 3)(2c_{m+2} - c_{m+1} + 3) = 0$
 $c_m = -3$ とすると
 c_{m+1} などのような値でも成り立つ
 $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_{98} = -3, c_{99} = 9, c_{100} = 3$
 を満たすことがあつた。